Высшее образование

физика

В.М.Гладской, П.И.Самойленко

Сборник задач с решениями

Допущено
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений, изучающих
курс общей физики

2-е издание, стереотипное

дрофа

Москва · 2004

УДК 53(076.1)
ББК 22.3я73
Г32

Гладской В. М.

Г32 Сборник задач по физике с решениями: Пособие для втузов / В. М. Гладской, П. И. Самойленко. — 2-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004. — 288 с.: ил.

ISBN 5—7107—8135—5

Пособие содержит задачи с решениями по основным разделам физики: физическим основам механики, основам молекулярной физики и термодинамики, электричеству и магнетизму, колебаниям и волнам, квантовой природе излучения, элементам квантовой механики, атомной и ядерной физики. По всем темам приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые при решении задач, а также даны задачи для самостоятельного решения.

Для студентов очных и заочных отделений втузов. Может быть использовано студентами колледжей технического профиля при изучении курса физики.

УДК 53(076.1)
ББК 22.3я73

Учебное издание

Гладской Владимир Матвеевич
Самойленко Петр Иванович

Сборник задач по физике с решениями

Зав. редакцией *Б. В. Понкратов*
Ответственный редактор *Е. А. Вольмир*
Редактор *В. В. Тихонов*
Художественное оформление *М. Г. Мицкевич*
Технический редактор *Н. И. Герасимова*
Компьютерная верстка *Г. В. Климушкина*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.006315.08.03 от 28.08.2003.

Подписано к печати 12 02 04 Формат 60x90 1/16. Бумага типографская Гарнитура «Школьная» Печать офсетная Усл печ л 18,0 Тираж 5 000 экз Заказ № 9332

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу:
127018, Москва, Сущевский вал, 49. Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.
Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.
Магазины «Переплетные птицы»:
127018, Москва, ул. Октябрьская, д. 89, стр. 1. Тел.: (095) 912-45-76;
140408, Московская обл., г. Коломна, Голутвин,
ул. Октябрьской революции, 366/2. Тел.: (095) 741-59-76.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов
в Тульской типографии 300600, г Тула, пр Ленина,109

ISBN 5—7107—8135—5

© ООО «Дрофа», 2002

Предисловие к первому изданию

Настоящее учебно-методическое пособие призвано помочь студентам технических вузов (особенно обучающимся без отрыва от производства) и колледжей самостоятельно научиться решать задачи по физике, поскольку в нем подробно рассмотрены решения числовых задач по всем разделам курса общей физики.

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, овладеть необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи по физике.

Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи — пытаться решать их самостоятельно. Отсюда вытекает диалектичность процесса обучения: знание теории приобретается одновременно с ее использованием для решения задач. Абстрактные поначалу законы, уравнения, определения понятий и физических величин (эта абстрактность и является главным «камнем преткновения» при изучении физики) в процессе их практического применения для описания конкретных физических явлений (т. е. при решении физических задач) начинают постепенно наполняться конкретным содержанием, и только тогда приходит понимание теории. Недаром известный итальянский физик Энрико Ферми утверждал, что «знать физику — означает умение решать задачи». Другими словами, уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.

В пособие включены задачи разной степени сложности, что позволяет использовать его в различных вузах и колледжах.

Все задачи объединены в шесть разделов: «Физические основы механики», «Основы молекулярной физики и термодинамики», «Электричество и магнетизм», «Колебания и волны», «Квантовая природа излучения» и «Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики». Внутри разделов задачи расположены по темам. В начале каждого раздела приведены основные законы, уравнения и формулы, используемые при решении задач, а в конце раздела даны задачи для самостоятельного решения, позволяющие оценить свои знания.

В конце книги дано «Приложение», в котором приводятся необходимые справочные данные: основные физические постоянные, сводные таблицы физических величин, некоторые астрономические величины, сведения о приближенных вычислениях.

ЧАСТЬ 1

Физические основы механики

Основные формулы

- Скорость мгновенная $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$

  где $\vec{r}$ — радиус-вектор материальной точки,
  t — время,
  s — расстояние вдоль траектории движения, путь,
  $\vec{\tau}$ — единичный вектор, касательный к траектории.

- Ускорение:

  мгновенное $\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}$

  тангенциальное $\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}$

  нормальное $\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$

  где R — радиус кривизны траектории,
  n — единичный вектор главной нормали

  полное $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

- Скорость угловая $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

  где φ — угловое перемещение.

- Ускорение угловое $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

- Связь между линейными и угловыми величинами $s = \varphi R$, $\upsilon = \omega R$; $a_\tau = \varepsilon R$, $a_n = \omega^2 R$

- Импульс (количество движения) материальной точки $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

  где m — масса материальной точки.

- Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

- Закон сохранения импульса для изолированной системы тел $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = \text{const}$

- Скорости частиц после столкновения:

  упругого центрального $\vec{u}_1 = -\vec{\upsilon}_1 + 2\frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$

  $\vec{u}_2 = -\vec{\upsilon}_2 + 2\frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$

неупругого $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — скорости частиц до столкновения,
m_1 и m_2 — массы частиц.

- Сила сухого трения $F_{тр} = fF_n$

где f — коэффициент трения,
F_n — сила нормального давления.

- Сила упругости $\vec{F}_{уп} = -k\Delta l \cdot \vec{i}$

где k — коэффициент упругости (жесткость),
Δl — деформация,
$\vec{i}$ — вектор, указывающий направление деформации.

- Сила гравитационного взаимодействия $\vec{F}_{гр} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^3} \cdot \vec{r}_{12}$

где G — гравитационная постоянная,
r — расстояние между частицами,
m_1 и m_2 — массы частиц,
$\vec{r}_{12}$ — радиус-вектор, проведенный от второй частицы к первой.

- Работа силы $A = \int \vec{F} d\vec{r}$
- Мощность $N = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v}$
- Потенциальная энергия:
  упругодеформированного тела $E_п = \dfrac{k(\Delta l)^2}{2}$
  гравитационного взаимодействия $E_п = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$
  тела в однородном гравитационном поле $E_п = mgh$

где g — напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения),
h — расстояние от нулевого уровня.

- Напряженность гравитационного поля Земли $g = \dfrac{GM_З}{(R_З + h)^2}$

где $M_З$ — масса Земли,
$R_З$ — радиус Земли,
h — расстояние от поверхности Земли.

- Потенциал гравитационного поля Земли $\varphi = -\dfrac{GM_З}{R_З + h}$
- Кинетическая энергия материальной точки $E_к = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$
- Закон сохранения механической энергии $E = E_к + E_п = \text{const}$
- Момент инерции материальной точки $J = mr^2$

где r — расстояние до оси вращения.

- Моменты инерции тел массой m относительно оси, проходящей через центр масс:

  тонкостенного цилиндра (кольца) радиуса R $J_0 = mR^2$

  сплошного цилиндра (диска) радиуса R $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$

  шара радиуса R $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$

  тонкого стержня длиной l. Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину. $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$

- Момент инерции тела массой m относительно произвольной оси (теорема Штейнера) $J = J_0 + md^2$

  где J_0 — момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс,
  d — расстояние между осями.

- Момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

  где r — радиус-вектор точки приложения силы.

- Момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J\vec{\omega}$

- Основное уравнение динамики вращательного движения $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\vec{\varepsilon}$

- Закон сохранения момента импульса для изолированной системы $\vec{L} = \text{const}$

- Работа при вращательном движении $A = \int \vec{M} d\vec{\varphi}$

- Кинетическая энергия вращающегося тела $E_к = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$

- Релятивистское сокращение длины $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$

  где l_0 — длина покоящегося тела,
  c — скорость света в вакууме.

- Релятивистское замедление времени $t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

  где t_0 — собственное время.

- Энергия покоя частицы $E_0 = mc^2$

  где m — масса.

- Полная энергия релятивистской частицы $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

- Релятивистский импульс $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

- Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E_к = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

- Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

- Теорема сложения скоростей в релятивистской механике

$$u' = \frac{u \mp v}{1 \mp uv/c^2}$$

где u' и u — скорости в двух инерциальных системах координат, движущихся относительно друг друга со скоростью v, совпадающей по направлению с u (знак −) или противоположно ей направленной (знак +).

- Уравнение неразрывности

$$\rho S v = \text{const}$$

где S — поперечное сечение трубки тока,
v — скорость течения жидкости,
ρ — плотность жидкости.

- Уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

где ρ — плотность,
v — скорость,
p — давление жидкости на высоте h.

- Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

где d — диаметр трубы,
η — коэффициент вязкости.

- Сила внутреннего трения (формула Стокса)

$$F_C = 6\pi\eta r v$$

где r — радиус шарика.

Примеры решения задач

1. Кинематика и динамика поступательного движения

1. Движение материальной точки, перемещающейся по прямой, задано уравнением $s = 4t^3 + 2t + 1$. В интервале времени от 1 до 2 с найти мгновенные скорости и ускорения в начале и конце интервала, среднюю скорость движения.

Дано: $s = 4t^3 + 2t + 1$; $t_1 = 1$ с; $t_2 = 2$ с.

Найти: v_1, v_2, a_1, a_2, $\langle v \rangle$.

Решение. Мгновенная скорость — первая производная от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = 12t^2 + 2.$$

Скорости в начале и конце интервала равны:

$$v_1 = 12 \cdot t_1^2 + 2 = 12 \cdot 1^2 + 2 = 14 \text{ (м/с)},$$

$$v_2 = 12 \cdot t_2^2 + 2 = 12 \cdot 2^2 + 2 = 50 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение — это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 24t.$$

В начале и конце интервала ускорения равны:

$$a_1 = 24t_1 = 24 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a_2 = 24t_2 = 48 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Средняя скорость $<v>$ движения точки определяется как отношение пути s, пройденного точкой за заданный интервал времени t, к этому интервалу:

$$<v> = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{4t_2^3 + 2t_2 + 1 - 4t_1^3 - 2t_1 - 1}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{4(t_2^3 - t_1^3) + 2(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{4(2^3 - 1) + 2(2 - 1)}{2 - 1} = 30 \text{ (м/с)}.$$

2. Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $s = t^4 + 2t^2 + 5$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время.

Дано: $s = t^4 + 2t^2 + 5$, $t = 2$ с.

Найти: v, a, $<v>$, s.

Решение. Мгновенная скорость — это первая производная от пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 4t = 4(2^3 + 2) = 40 \text{ (м/с)}.$$

Мгновенное ускорение — это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t^2 + 4 = 12 \cdot 2^2 + 4 = 52 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Средняя скорость точки $<v>$ за время $\Delta t = t - t_0$ определяется по формуле

$$<v> = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(0)}{t - t_0}.$$

Так как $t_0 = 0$, то $<v> = \frac{t^4 + 2t^2 + 5 - 5}{t} = t^3 + 2t = 12$ (м/с).

Путь, пройденный точкой за время $t = 2$ с, будет равен

$$s = s(t) - s(0) = t^4 + 2t^2 + 5 - 5 = 2^4 + 2 \cdot 2^2 = 24 \text{ (м)}.$$

3. Движение двух тел описывается уравнениями $x_1 = 0{,}75t^3 + 2{,}25t^2 + t$, $x_2 = 0{,}25t^3 + 3t^2 + 1{,}5t$. Определить величину скоростей этих тел и момент времени, когда ускорения их будут одинаковы, а также значение ускорения в этот момент времени.

Дано: $x_1 = 0{,}75t^3 + 2{,}25t^2 + t$, $x_2 = 0{,}25t^3 + 3t^2 + 1{,}5t$.

Найти: v_1, v_2, t, a при $a_1 = a_2 = a$.

Решение. Определим момент времени, когда ускорения обоих тел одинаковы. Для этого найдем выражение для ускорения первого и второго тела, продифференцировав по времени уравнения движения этих тел:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = 4{,}5 + 4{,}5t,$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 6 + 1{,}5t.$$

Согласно условию $a_1 = a_2$ в какой-то момент времени t. Приравниваем полученные выражения для a друг к другу и решаем уравнение относительно t:

$$4{,}5 + 4{,}5t = 6 + 1{,}5t;\ 3t = 1{,}5;\ t = 0{,}5 \text{ с}.$$

Зная t, найдем значение скоростей тел в этот момент времени:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2{,}25t^2 + 4{,}5t + 1 = 2{,}25 \cdot 0{,}5^2 + 4{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 1 \simeq$$

$$\simeq 3{,}81 \text{ (м/с)},$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0{,}75t^2 + 6t + 1{,}5 = 0{,}75 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \simeq$$

$$\simeq 4{,}69 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение тел в этот момент времени будет

$$a_1 = a_2 = 6 + 1{,}5t = 6{,}75 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

4. С башни брошен камень в горизонтальном направлении с начальной скоростью 40 м/с. Какова скорость камня через 3 с после начала движения? Какой угол образует вектор скорости камня с плоскостью горизонта в этот момент?

Дано: $v_0 = 40$ м/с, $t = 3$ с, $g = 9{,}81$ м/с^2, $v_г = v_0$.

Найти: v, α.

Решение. В момент времени t вертикальная составляющая скорости камня $v_в$ будет равна $v_в = gt$, где g — ускорение свободного падения (рис. 1). Так как $v_г$ остается постоянной, то скорость v будет равна

$$v = \sqrt{v_г^2 + v_в^2} = \sqrt{v_г^2 + g^2t^2} = \sqrt{40^2 + 9{,}81^2 \cdot 9} \simeq 49{,}66 \text{ (м/с)}.$$

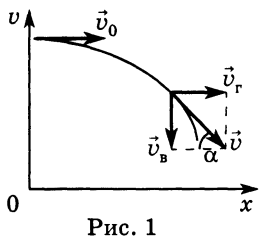


Рис. 1

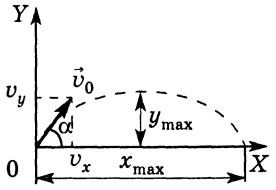


Рис. 2

Результирующая скорость $\vec{v}$ составляет угол α с плоскостью горизонта (см. рис. 1), а

$$\sin\alpha = \frac{v_в}{v} = \frac{gt}{v} = \frac{9{,}81 \cdot 3}{49{,}66} \simeq 0{,}593.$$

$$\text{Угол } \alpha = \arcsin 0{,}593 \simeq 36°.$$

5. Тело брошено под углом 45° к горизонту. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета, если начальная скорость тела $v_0 = 20$ м/с.

Дано: $\alpha = 45°$; $v_0 = 20$ м/с; $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: y_{max}, x_{max}.

Решение. Из рис. 2 видно, что составляющие скорости v_x и v_y можно записать в виде:

$$v_x = v_0\cos\alpha,$$
$$v_y = v_0\sin\alpha - gt,$$

где g — ускорение свободного падения.

В наивысшей точке $v_y = 0$ и тогда $v_0\sin\alpha - gt = 0$.

Время подъема тела на максимальную высоту t_y определится из этого условия: $t_y = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$.

Время подъема и время падения равны между собой, т. е. $t = 2t_y = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

Дальность полета тела $x_{max} = v_x \cdot t = v_0\cos\alpha \cdot \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} =$

$= \dfrac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = \dfrac{20^2}{9{,}81} \cdot 1 \simeq 40{,}77$ (м).

Наибольшая высота подъема

$$y_{max} = v_y t_y - \frac{gt_y^2}{2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{20^2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 9{,}81} \simeq 10{,}19 \text{ (м)}.$$

6. Тяжелое тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить продолжительность полета тела до точки A и до точки B (рис. 3); максимальную высоту, которой достигнет тело, дальность полета тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

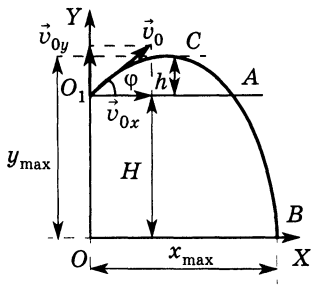


Рис. 3

Дано: $H = 12$ м; $\varphi = 30°$; $v_0 = 12$ м/с.

Найти: t_A, t_B, H_{max}, x_{max}.

Решение. В обозначенной на рис. 3 системе координат составляющие скорости будут:

$$v_x = v_0 \cos\varphi; \tag{1}$$

$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt. \tag{2}$$

Координаты тела с течением времени меняются в соответствии с уравнением равнопеременного движения:

$$y = H + v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}; \tag{3}$$

$$x = v_0 t \cos\varphi. \tag{4}$$

Время подъема тела найдем из условия, что в наивысшей точке подъема тела скорость $v_y = 0$. Тогда из уравнения (2)

$$t_{\text{подъема}} = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}. \tag{5}$$

Время спуска тела от точки C до точки A равно времени подъема, поэтому продолжительность полета от точки O до точки A равна:

$$t_A = 2t_{\text{подъема}} = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g}. \tag{6}$$

Максимальную высоту подъема найдем из уравнения (3), подставив в него время подъема из уравнения (5):

$$y_{max} = H_{max} = H + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}. \tag{7}$$

Время полета тела до точки B найдем из уравнения (3), приравняв координату y к нулю ($y = 0$):

$$t_B = \frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\varphi}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}. \tag{8}$$

Дальность полета найдем из уравнения (4), подставив в него время движения из уравнения (8) $x_{\max} = v_0 t_B \cos\varphi$ (9). Проведем вычисления по формуле (6):

$$t_A = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 0{,}5}{9{,}81} \simeq 1{,}22 \text{ (с)};$$

по формуле (8):

$$t_B = \frac{12 \cdot 0{,}5}{9{,}81} + \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 0{,}5}{9{,}81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 12}{9{,}81}} \simeq 2{,}29 \text{ (с)};$$

по формуле (7):

$$H_{\max} = 12 + \frac{12^2 \cdot 0{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} \simeq 12 + 1{,}83 = 13{,}83 \text{ (м)};$$

по формуле (9):

$$x_{\max} = 12 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}29 \simeq 23{,}8 \text{ (м)}.$$

7. По условию задачи 6 найти в момент приземления тела следующие величины: скорость и угол падения тела, тангенциальное и нормальное ускорения тела и радиус кривизны траектории.

Дано: $H = 12$ м; $\varphi = 30°$; $v_0 = 12$ м/с.

Найти: v_B, β, a_τ, a_n, R.

Решение. Результирующая или мгновенная скорость в точке B (рис. 4) находится как векторная сумма составляющих $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$: $\vec{v}_B = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ или $v_B = \sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + v_y^2}$.

Составляющую v_y в точке B найдем из уравнения (2) предыдущей задачи, подставив в него время движения t_B из уравнения (8):

$$v_y = v_0 \sin\varphi - g t_B = \sqrt{(v_0 \sin\varphi)^2 + 2gH}.$$

Тогда скорость в точке B:

$$v_B = \sqrt{(v_0 \cos\varphi)^2 + (v_0 \sin\varphi)^2 + 2gH} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

Вычисляем

$$v_B = \sqrt{12^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 12} \simeq 19{,}48 \text{ (м/с)}.$$

Для определения угла β, который составляет вектор скорости $\vec{v}_B$ с горизонтальной осью x, воспользуемся треугольником скоростей (рис. 4):

$$\sin\beta = \frac{v_y}{v_B} = \frac{\sqrt{(v_0 \sin\varphi)^2 + 2gH}}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}} \simeq \frac{16{,}48}{19{,}48} = 0{,}846;$$

$$\beta = \arcsin 0{,}846 = 57°46'.$$

Построим в точке B треугольник ускорений. Тангенциальная составляющая ускорения $\vec{a}_\tau$ направлена вдоль вектора мгновенной скорости в данной точке, т. е. по касательной к траектории. Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n$ направлена перпендикулярно вектору мгновенной скорости $\vec{v}_B$. Их векторная сумма $\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{g}$.

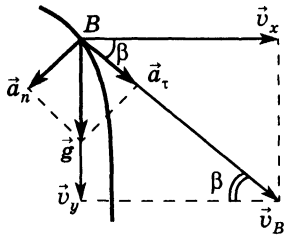


Рис. 4

Тогда из рис. 4 находим:

$$a_\tau = g \sin\beta = g\frac{v_y}{v_B};\ a_n = g\cos\beta = g\frac{v_x}{v_B}.$$

Вычисляем $a_\tau = g \sin\beta = 9{,}81 \cdot 0{,}846 \simeq 8{,}3$ (м/с^2).

$$a_n = g\cos\beta = 9{,}81 \cdot 0{,}533 \simeq 5{,}23 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Радиус кривизны траектории в точке приземления определяем из уравнения

$$a_n = \frac{v_B^2}{R}.$$

Отсюда $$R = \frac{v_B^2}{a_n} = \frac{19{,}48^2}{5{,}23} \simeq 72{,}56 \text{ (м)}.$$

8. Точка начала двигаться по окружности радиусом 0,6 м с тангенциальным ускорением 0,1 м/с^2. Чему равны нормальное и полное ускорения в конце третьей секунды после начала движения? Чему равен угол между векторами полного и нормального ускорений в этот момент?

Дано: $r = 0{,}6$ м; $a_\tau = 0{,}1$ м/с^2; $t = 3$ с.

Найти: a_n, a, α.

Решение. К моменту времени t точка, двигаясь равноускоренно с ускорением a_τ, приобретает скорость v, определяемую по формуле $v = a_\tau t$. Нормальное ускорение a_n точки при этом будет

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{r} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 9}{0{,}6} = 0{,}15 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Полное ускорение $\vec{a}$ равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорений $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Угол между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ всегда равен $\pi/2$, поэтому

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}15^2} \simeq 0{,}18 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Из рис. 5 видно, что sin α угла между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}$ будет равен $\sin\alpha = \frac{a_\tau}{a} = \frac{0{,}1}{0{,}18} = 0{,}556$.

Угол $\alpha = \arcsin 0{,}556 \simeq 33°25'$.

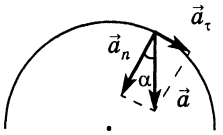


Рис. 5

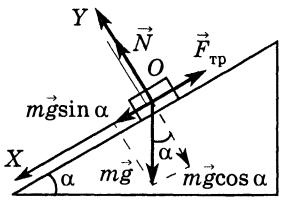


Рис. 6

9. Тело движется вниз равноускоренно по наклонной плоскости, и зависимость пройденного пути от времени задается уравнением $s = 2t + 1{,}6t^2$. Найти коэффициент трения k тела о плоскость, если угол наклона плоскости к горизонту равен 30°.

Дано: $s = 2t + 1{,}6t^2$, $\alpha = 30°$.

Найти: k.

Решение. Коэффициент трения k определяет силу трения при движении тел. Для нахождения k рассмотрим, под действием каких сил находится тело. В данном случае на тело действуют силы: сила тяжести mg, сила реакции опоры N и сила трения $F_{тр}$.

Выберем систему координат так, чтобы ось OX была параллельна наклонной плоскости (рис. 6). Тогда, согласно второму закону Ньютона, запишем проекции сил на оси:

на OY: $mg\cos\alpha = N$; на OX: $ma = mg\sin\alpha - mgk\cos\alpha$.

Преобразовывая это выражение, можно найти коэффициент трения k:

$$k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}.$$

Определим величину ускорения a:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 3{,}2\ (\text{м/с}^2).$$

Подставив в формулу для k численные значения входящих в нее величин, получим коэффициент трения:

$$k = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}5 - 3{,}2}{9{,}81 \cdot 0{,}866} = 0{,}2.$$

10. По горизонтальной плоскости равномерно перемещается тело массой 1 кг (без качения). Определить коэффициент трения, если тело перемещается под действием силы 1 Н.

Дано: $m = 1$ кг, $F = 1$ Н.

Найти: k.

Решение. На тело действуют две силы — движущая сила F и сила трения $F_{тр} = kmg$. Так как тело движется равномерно, то равнодействующая сил равна нулю $\vec{F} + \vec{F}_{тр} = 0$, или $F - kmg = 0$.

Откуда получим

$$k = \frac{F}{mg} = \frac{1}{1 \cdot 9{,}81} = 0{,}1.$$

11. Тело массой 100 кг поднимается по наклонной плоскости с углом у основания 20° под действием силы, равной 1000 Н и направленной параллельно плоскости. Коэффициент трения тела о плоскость равен 0,1. С каким ускорением будет двигаться тело?

Дано: $m = 100$ кг, $\alpha = 20°$, $F_т = 1000$ Н, $k = 0{,}1$, $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: a.

Решение. На тело (рис. 7), движущееся по наклонной плоскости, действуют силы:

— сила трения $F_{тр} = Nk = kmg \cos \alpha$, где k — коэффициент трения, N — сила реакции плоскости на вес тела;

— сила тяжести mg;

— сила тяги $F_т$.

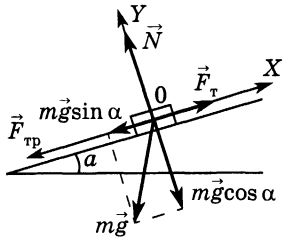


Рис. 7

Выберем систему координат так, чтобы ось OX была параллельна наклонной плоскости.

Рассмотрим проекции сил на оси координат:

на OY: $N = mg \cos \alpha$;

на OX: $ma = F_т - mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha$, откуда

$$a = \frac{F}{m} - g(k \cos \alpha + \sin \alpha) =$$

$$= \frac{1000}{100} - 9{,}8(0{,}1 \cdot 0{,}9397 + 0{,}342) \simeq 5{,}72 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

12. Пуля массой 20 г в момент удара о стенку под углом 90° имела скорость 300 м/с. Углубившись в стенку на какое-то расстояние, она остановилась через время $5 \cdot 10^{-4}$ с. Определить:

1) среднюю силу сопротивления стенки $F_с$ и расстояние l, на которое пуля проникла;

2) с какой скоростью $v_к$ пуля вылетит из стенки, если стенка будет иметь толщину 5 см.

Дано: $m = 2 \cdot 10^{-2}$ кг, $\alpha = 90°$, $t = 5 \cdot 10^{-4}$ с, $d = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $v_0 = 300$ м/с.

Найти: $<F_c>$, l, $v_к$.

Решение. 1. Среднюю силу сопротивления найдем из второго закона Ньютона. По второму закону Ньютона импульс силы сопротивления стенки равен изменению импульса пули:

$$F_c dt = d(mv) \text{ или при } m = \text{const: } F_c dt = m dv,$$

где F_c — сила сопротивления стенки; dt — время действия силы. Так как движение пули равнопеременное, то для конечного промежутка времени второй закон Ньютона запишется в виде: $<F_c> \Delta t = m\Delta v$, где $<F_c>$ — среднее за время Δt значение силы сопротивления, $\Delta v = v_к - v_0 = -v_0$, значение $v_к = 0$, так как по условию пуля остановилась. Тогда

$$<F_c> \cdot \Delta t = -mv_0; <F_c> = -\frac{mv_0}{\Delta t}.$$

Получаем:

$$<F_c> = \frac{-2 \cdot 10^{-2} \cdot 300}{5 \cdot 10^{-4}} = -1{,}2 \cdot 10^4 \text{ (Н)}.$$

Расстояние, на которое углубилась пуля, найдем, учитывая, что кинетическая энергия пули ушла на работу по преодолению сопротивления стенки:

$$\frac{mv^2}{2} = F_c l \cos \alpha,$$

$\alpha = 0$ — по условию.

Отсюда: $l = \frac{mv_0^2}{2F_c} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^4}{2 \cdot 12 \cdot 10^3} = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ (м).

2. Скорость, с которой вылетела пуля из стенки при толщине 5 см, найдем из условия, что начальная скорость пули та же, стена из того же материала, следовательно, силу сопротивления можно взять из вышеприведенного решения.

Если пуля вылетает из стенки с некоторой скоростью $v_к$, то на работу против силы сопротивления F_c пошла энергия, равная разности кинетической энергии пули в начале и в конце ее движения в толще стенки:

$$-F_c d = \frac{mv_к^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Отсюда найдем: $v_к^2 = v_0^2 - \frac{2F_c d}{m}$;

$$v_к = \sqrt{v_0^2 - \frac{2F_c d}{m}} = \sqrt{9 \cdot 10^4 - \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{20 \cdot 10^{-3}}} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^4} \simeq 173 \text{ м/с}.$$

13. Металлический шарик массой 5 г падает с высоты 1 м на горизонтальную поверхность стола и, отразившись от нее, поднимается на высоту 0,8 м. Определить среднюю силу удара, если соприкосновение шарика со столом длилось 0,01 с.

Дано: $m = 5 \cdot 10^{-3}$ кг; $h_1 = 1$ м; $h_2 = 0{,}8$ м; $\Delta t = 0{,}01$ с.

Найти: F.

Решение. Импульс силы F за время Δt, с которым шарик воздействует на поверхность, равен $F\Delta t$. Этот импульс силы будет равен изменению импульса шарика $\Delta p = mv_1 - (-mv_2)$, где m — масса шарика, v_1 — скорость, с которой шарик опустился на поверхность стола, v_2 — скорость, с которой шарик отскочил от поверхности стола. Знак «$-$» означает, что направление скорости v_2 противоположно направлению скорости v_1.

При свободном падении тела с высоты h его скорость на уровне $h = 0$ определяется по формуле $v = \sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения.

Таким образом, $F\Delta t = \Delta p$, $F\Delta t = mv_1 + mv_2$, откуда

$$F = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} = \frac{(m \cdot \sqrt{2g})(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})}{\Delta t} =$$

$$= \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}(\sqrt{1} + \sqrt{0{,}8})}{0{,}01} \simeq 0{,}22 \text{ (Н)}.$$

2. Кинематика и динамика вращательного движения

14. Зависимость угла поворота от времени для точки, лежащей на ободе колеса радиуса R, задается уравнением $\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$. К концу третьей секунды эта точка получила нормальное ускорение, равное 153 м/с^2. Определить радиус колеса.

Дано: $\varphi = t^3 + 0{,}5t^2 + 2t + 1$; $t = 3$ с; $a_n = 153$ м/с^2.

Найти: R.

Решение. Для определения радиуса колеса воспользуемся формулой связи нормального ускорения с угловой скоростью:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Отсюда $R = \frac{a_n}{\omega^2}$. Угловую скорость найдем, как первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 + t + 2.$$

Численное значение угловой скорости в конце третьей секунды найдем, подставив в полученное уравнение для ω время $t = 3$ с.

$$\omega = (2 + 3 + 3 \cdot 9) = 32\ (1/\text{с}).$$

Радиус колеса равен $R = \frac{a_n}{\omega^2} = \frac{153}{32^2} \simeq 0{,}15$ (м).

15. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$. Найти величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения для момента времени $t = 4$ с.

Дано: $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$; $r = 0{,}1$ м; $t = 4$ с.

Найти: a, α.

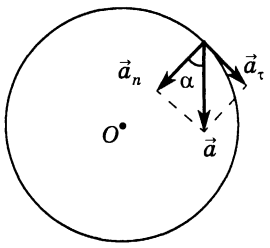


Рис. 8

Решение. Точка описывает окружность радиуса r. Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по криволинейной траектории, равно геометрической сумме векторов тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений (рис. 8), угол между которыми равен $\pi/2$:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Величина полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Тангенциальное и нормальное ускорения выражаются формулами $a_\tau = \varepsilon r$, $a_n = \omega^2 r$, где ω — угловая скорость тела, ε — угловое ускорение, r — расстояние точки от оси вращения. Подставляя эти выражения в формулу для полного ускорения, получим:

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угловая скорость равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20 - 4t.$$

При $t = 4$ с значение $\omega = 4$ с$^{-1}$.

Угловое ускорение — это первая производная от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -4\ (\text{с}^{-2}).$$

Тогда $a = 0{,}1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} \simeq 1{,}65\ (\text{м/с}^2)$.

Из рис. 8 видно, что sin α угла между направлением $\vec{a}$ и $\vec{a}_n$ равен:

$$\sin\alpha = \frac{a_\tau}{a} = \frac{\varepsilon \cdot r}{a} = \frac{4 \cdot 0{,}1}{1{,}65} = 0{,}242.$$

Угол $\alpha = \arcsin 0{,}242 \simeq 14°$.

Угол между $\vec{a}$ и $\vec{a}_\tau$ будет равен:

$$90° - 14° = 76°.$$

16. Маховик массой 4 кг свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр, делая 720 об/мин. Массу маховика можно считать распределенной по его ободу радиусом 40 см. Через 30 с под действием тормозящего момента маховик остановился. Найти тормозящий момент и число оборотов, которое делает маховик до полной остановки.

Дано: $\omega = 0$; $m = 4$ кг; $n = 720$ об/мин $= 12\ \text{с}^{-1}$; $\Delta t = 30$ с; $R = 40$ см $= 0{,}4$ м.

Найти: M, N.

Решение. Для определения тормозящего момента M нужно применить основное уравнение динамики вращательного движения

$$J\Delta\omega = M\Delta t, \qquad (1)$$

где J — момент инерции маховика относительно оси, проходящей через центр масс; $\Delta\omega$ — изменение угловой скорости за время Δt, причем $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, где ω — конечная угловая скорость, а ω_0 — начальная; M — тормозящий момент сил, действующих на тело.

По условию задачи $\Delta\omega = -\omega_0$, так как конечная угловая скорость $\omega = 0$. Выразим начальную угловую скорость ω_0 через число оборотов маховика n в единицу времени, тогда

$$\omega_0 = 2\pi n \text{ и } \Delta\omega = -2\pi n.$$

Момент инерции маховика $J = mR^2$, где m — масса маховика, а R — его радиус. Зная все величины, можно определить тормозящий момент:

$$-mR^2 \cdot 2\pi n = M\Delta t,$$

откуда $M = -\dfrac{2\pi n \cdot mR^2}{\Delta t} = -\dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 0{,}4^2}{30} \simeq -1{,}61\ (\text{Н} \cdot \text{м})$.

Угол поворота (угловой путь φ) за время вращения маховика до остановки может быть определен по формуле для равнозамедленного вращения

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\varepsilon \Delta t^2}{2}, \qquad (2)$$

где ε — угловое ускорение. По условию задачи:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \Delta t;\ \omega = 0;\ \omega_0 = \varepsilon \Delta t.$$

Тогда выражение (2) может быть записано так:

$$\varphi = \omega_0 \Delta t - \frac{\omega_0 \Delta t}{2} = \frac{\omega_0 \Delta t}{2}. \qquad (3)$$

Формула (3) может быть также получена по значению средней угловой скорости. Выразив значение φ через число полных оборотов N и ω_0 через число оборотов маховика n в единицу времени, найдем $\varphi = 2\pi N$; $\omega_0 = 2\pi n$.

Отсюда определим число полных оборотов N:

$$\varphi = \frac{\omega_0 \Delta t}{2};\ 2\pi N = \frac{2\pi n \Delta t}{2};\ N = \frac{n \Delta t}{2} = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180.$$

17. Однородный диск, имеющий вес $P = 124$ Н, вращается с постоянным угловым ускорением, и его движение описывается уравнением $\varphi = 30t^2 + 2t + 1$. Диск вращается под действием постоянной касательной тангенциальной силы $F_\tau = 90{,}2$ Н, приложенной к ободу диска. Определить момент сил трения $M_{тр}$, действующих на диск при вращении. Радиус диска $R = 0{,}15$ м.

Дано: $P = 124$ Н, $\varphi = 30t^2 + 2t + 1$, $F_\tau = 90{,}2$ Н, $R = 0{,}15$ м.

Найти: $M_{тр}$.

Решение. Для нахождения $M_{тр}$ используем второй закон Ньютона для вращательного движения. На диск при вращении действуют две силы: движущая сила F_τ, сила трения $F_{тр}$. Результирующий момент сил, под действием которого вращается диск, равен:

$$M = F_\tau R - M_{тр}.$$

С другой стороны, согласно основному закону динамики вращательного движения,

$$M = J\varepsilon,$$

где J — момент инерции диска; $J = \frac{mR^2}{2}$, ε — угловое ускорение, приобретаемое диском под действием результирующего момента сил M.

Искомый момент сил трения найдем, приравняв друг к другу два полученных выражения для M.

Значение ε найдем из уравнения движения, взяв вторую производную по времени от φ:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 60\ (\text{с}^{-2}).$$

Масса диска равна:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{124}{9{,}81} = 12{,}64\ (\text{кг}).$$

Окончательно:

$$M_{\text{тр}} = F_{\tau} \cdot R - \frac{mR^2}{2} \cdot \varepsilon.$$

Подставив сюда численные значения F_{τ}, R, ε и m, получим:

$$M_{\text{тр}} = 90{,}2 \cdot 0{,}15 - \frac{12{,}7 \cdot 0{,}0225}{2} \cdot 60 \simeq 5\ (\text{Н} \cdot \text{м}).$$

18. Два маховика в виде дисков одинаковых радиусов и масс были раскручены до скорости вращения 480 об/мин и предоставлены самим себе. Под действием сил трения валов о подшипники первый остановился через 80 с, а второй сделал 240 оборотов до остановки. У какого маховика момент сил трения валов о подшипники был больше и во сколько раз?

Дано: $n = 480$ об/мин $= 8\ \text{с}^{-1}$; $N = 240$; $\Delta t = 80$ с; $\omega_2 = 0$.

Найти: $\frac{M_2}{M_1}$.

Решение. Момент сил трения M_1 первого маховика найдем, воспользовавшись основным уравнением динамики вращательного движения

$$M_1 \Delta t = J\omega_2 - J\omega_1,$$

где Δt — время действия момента сил трения, J — момент инерции маховиков $J = \frac{mR^2}{2}$, ω_1 и ω_2 — начальная и конечная угловые скорости маховиков, $\omega_1 = 2\pi n$, $\omega_2 = 0$, m — масса.

Тогда $$M_1 = \frac{J(\omega_2 - \omega_1)}{\Delta t} = -\frac{J\omega_1}{\Delta t}.$$

Момент сил трения M_2 второго маховика выразим через связь между работой A сил трения и изменением его кинетической энергии $\Delta E_{\text{к}}$:

$$A = \Delta E_{\text{к}},\ A = M_2 \cdot \Delta\varphi,\ \Delta E_{\text{к}} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2},$$

где $\Delta\varphi = 2\pi N$ — угол поворота, N — число оборотов маховика.

Тогда

$$M_2 \cdot \Delta\varphi = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = -\frac{J\omega_1^2}{2}, \text{ откуда } M_2 = -\frac{J\omega_1^2}{2\Delta\varphi}.$$

Отношение $\frac{M_2}{M_1}$ будет равно

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{J\omega_1^2}{2\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta t}{J\omega_1} = \frac{(\Delta t)\cdot\omega_1}{2\Delta\varphi} = \frac{\Delta t 2\pi n}{2\cdot 2\pi N} = \frac{80\cdot 8}{2\cdot 240} \simeq 1{,}33.$$

Момент сил трения второго маховика в 1,33 раза больше.

19. Легкая нить с прикрепленным к ней грузом массой 2 кг намотана на сплошной вал радиусом 10 см. При разматывании нити груз опускается с ускорением 0,5 м/с^2. Определить массу и момент инерции вала.

Дано: $m_1 = 2$ кг; $r = 0{,}1$ м; $a = 0{,}5$ м/с^2.

Найти: m_2, J.

Решение. Вал приходит во вращение под действием момента силы M, равного $M = m_1(g - a)r$, где m_1 — масса груза, опускающегося с ускорением a, r — радиус вала. Согласно уравнению динамики вращательного движения, $M = J\varepsilon$, где J — момент инерции вала, $\varepsilon = a/r$ — угловое ускорение. Отсюда

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{Mr}{a} = \frac{m_1(g-a)r^2}{a} = m_1 r^2\left(\frac{g}{a} - 1\right);$$

$$J = 2\cdot 10^{-2}\left(\frac{9{,}81}{0{,}5} - 1\right) \simeq 0{,}37 \text{ (кг}\cdot\text{м}^2\text{)}.$$

Момент инерции сплошного цилиндра (вала) определяется по формуле $J = m_2\frac{r^2}{2}$, откуда

$$m_2 = \frac{2J}{r^2};\ m_2 = \frac{2\cdot 0{,}37}{1\cdot 10^{-2}} = 74 \text{ (кг)}.$$

20. Сплошной диск радиусом 20 см вращается под действием постоянной касательной силы 40 Н. Кроме того, на него действует момент сил трения 2 Н·м, и угловое ускорение его равно 30 рад/с^2. Определить массу диска.

Дано: $r = 0{,}2$ м; $F = 40$ Н; $M_{\text{тр}} = 2$ Н·м; $\varepsilon = 30$ рад/с^2.

Найти: m.

Решение. Суммарный момент сил M, под действием которого вращается диск, равен $M = Fr - M_{\text{тр}}$.

По закону динамики вращательного движения этот момент сил равен:

$M = J\varepsilon$, где $J = mr^2/2$ — момент инерции сплошного диска, где m — масса, r — радиус диска, ε — угловое ускорение. Приравниваем эти выражения для момента сил

$$Fr - M_{тр} = J\varepsilon;\ Fr - M_{тр} = \frac{mr^2}{2} \cdot \varepsilon.$$

Отсюда

$$m = \frac{1(Fr - M_{тр})}{\varepsilon r^2};\ m = \frac{2(40 \cdot 0{,}2 - 2)}{30 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 10\ (\text{кг}).$$

21. Шар и полый цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

Дано: $m_1 = m_2 = m$; $E_{к1} = E_{к2}$.

Найти: υ_2, υ_1.

Решение. Кинетическая энергия тела, участвующего одновременно в двух движениях, складывается из кинетической энергии поступательного $E_п$ и вращательного $E_в$ движений

$$E_к = E_п + E_в = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Учитывая, что момент инерции полого цилиндра равен $J_1 = mr^2$, шара $J_2 = \frac{2}{5}mr^2$, а связь угловой ω и линейной υ скоростей $\omega = \upsilon/r$, выражения для $E_к$ полого цилиндра и шара будут иметь вид

$$E_{к1} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\upsilon_1^2}{r^2} = m\upsilon_1^2,$$

$$E_{к2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\upsilon_2^2}{r^2} = 0{,}7\ m\upsilon_2^2.$$

По условию задачи $E_{к1} = E_{к2}$, $m_1 = m_2 = m$ и тогда $m\upsilon_1^2 = 0{,}7m\upsilon_2^2$, откуда

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{0{,}7}} \simeq 1{,}2.$$

Скорость шара в 1,2 раза больше скорости цилиндра.

3. Импульс. Работа. Энергия. Законы сохранения

22. Человек, масса которого 70 кг, прыгает с неподвижной тележки со скоростью 7 м/с. Определить силу трения тележки о землю, если тележка после толчка остановилась через 5 с. Перед прыжком тележка была неподвижна относительно земли.

Дано: $m = 70$ кг; $v = 7$ м/с; $t = 5$ с.

Найти: $F_{тр}$.

Решение. В момент прыжка человек и тележка составляют одну изолированную систему и их импульс равен нулю. После прыжка по закону сохранения импульса в изолированной системе их суммарный импульс остался неизменным, т. е. равным нулю:

$$mv + m_1v_1 = 0,\ m_1v_1 = -mv, \qquad (1)$$

где m_1 и m_2 — массы тележки и человека; v_1 и v — скорости тележки и человека в момент прыжка.

Под действием силы трения тележка остановилась, следовательно, ее импульс стал равным нулю. По второму закону механики

$$F_{тр}t = m_1v_к - m_1v_1.$$

Так как конечная скорость тележки равна нулю: $v_к = 0$, то

$$F_{тр}t = -m_1v_1, \qquad (2)$$

где $F_{тр}$ — сила трения.

Знак «−» показывает, что сила $F_{тр}$ и скорость v_1 направлены в противоположные стороны. Подставим (1) в (2): $F_{тр}t = mv$, откуда

$$F_{тр} = \frac{mv}{t};\ F_{тр} = \frac{70 \cdot 7}{5} = 98\ (\text{Н}).$$

23. Орудие, установленное на железнодорожной платформе, стреляет под углом φ к горизонту. Снаряд массой 15 кг вылетает из орудия со скоростью 800 м/с. Вследствие отдачи платформа с орудием покатилась по рельсам со скоростью 0,5 м/с. Масса платформы с орудием 12 т. Определить угол φ.

Дано: $m_1 = 15$ кг, $v_1 = 800$ м/с, $m_2 = 1{,}2 \cdot 10^4$ кг, $v_2 = 0{,}5$ м/с.

Найти: φ.

Решение. Искомый угол φ найдем из следующих рассуждений. Считаем, что система «платформа с орудием — снаряд» является замкнутой. В такой системе действует закон сохранения импульса (количества движения). Для нашей системы он

запишется в виде $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$, так как до выстрела импульс системы был равен нулю. Запишем это уравнение в скалярной форме относительно оси OX (рис. 9): mv_{1x} — импульс снаряда, переданный платформе, при этом $v_{1x} = v_1 \times \cos\varphi$. Тогда закон сложения импульсов запишется в виде:

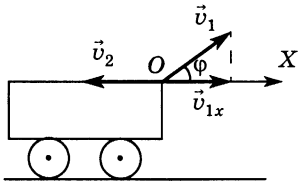


Рис. 9

$$m_1v_1\cos\varphi = m_2v_2.$$

Отсюда найдем искомый угол:

$$\cos\varphi = \frac{m_2v_2}{m_1v_1} = \frac{12\cdot10^3\cdot0{,}5}{15\cdot800} = 0{,}5;\ \varphi = 60°.$$

24. Шар массой 20 г, движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1, столкнулся с неподвижным шаром массой 40 г. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Дано: $m_1 = 20$ г $= 2\cdot10^{-2}$ кг; $m_2 = 40$ г $= 4\cdot10^{-2}$ кг.

Найти: ε.

Решение. Доля ε энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением:

$$\varepsilon = \frac{E_{к2}}{E_{к1}} = \frac{m_2u_2^2}{m_1v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2, \qquad (1)$$

где $E_{к1}$ — кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и $E_{к2}$ — скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для определения ε надо найти u_2. При ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. Пользуясь этими законами, найдем u_2. По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, получим:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2. \qquad (2)$$

По закону сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), найдем

$$u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив выражение для u_2 в формулу (1) и сократив на v_1 и m_1, получим

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1v_1}{v_1(m_1+m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2};$$

$$\varepsilon = \frac{4\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-2}}{(2\cdot 10^{-2}+4\cdot 10^{-2})^2} \simeq 0{,}89.$$

25. Груз массой 700 кг падает с высоты 5 м для забивки сваи массой 300 кг. Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая входит в грунт на глубину 4 см. Удар между грузом и сваей считать абсолютно неупругим.

Дано: $m_1 = 700$ кг; $h = 5$ м; $m_2 = 300$ кг; $s = 4$ см $= 0{,}04$ м.

Найти: $F_{ср}$.

Решение. По условию задачи удар неупругий, и поэтому груз и свая после удара двигаются вместе, их путь $s = 4$ см. На движущуюся систему действует сила тяжести и сила сопротивления грунта $F_{ср}$. По закону сохранения энергии

$$T + П = A, \qquad (1)$$

где T — кинетическая энергия; $П$ — потенциальная энергия; A — работа сил сопротивления, которую можно определить по формуле $A = F_{ср}s$. При движении системы на пути s изменяются ее потенциальная и кинетическая энергия

$$П = (m_1 + m_2)gs;$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2,$$

где u — общая скорость груза и сваи после удара (в начале их совместного движения). Используя это, запишем равенство (1) в виде

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + (m_1 + m_2)gs = F_{ср}s. \qquad (2)$$

Для оценки средней силы сопротивления $F_{ср}$ установим значение общей скорости груза и сваи, для чего применим закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\vec{v}_i = \text{const}. \qquad (3)$$

Для системы «груз — свая» закон сохранения импульса имеет вид:

$$m_1v = (m_1 + m_2)u, \qquad (4)$$

где υ — скорость груза в конце его падения с высоты h; $m_1\upsilon$ — импульс груза в конце его падения до удара о сваю; $(m_1 + m_2)u$ — импульс груза и сваи после удара.

Скорость груза υ в конце падения с высоты h определяется без учета сопротивления воздуха и трения:

$$\upsilon = \sqrt{2gh}\,. \tag{5}$$

Общая скорость груза и сваи после удара находится из формул (4) и (5):

$$u = \frac{m_1 \cdot \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}\,. \tag{6}$$

Определим среднюю силу сопротивления материала $F_{ср}$ из формул (2) и (6):

$$F_{ср} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{u^2}{s} + (m_1 + m_2)g; \tag{7}$$

$$F_{ср} = \frac{m_1^2 g}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{h}{s} + (m_1 + m_2)g. \tag{8}$$

$$F_{ср} = \frac{700^2 \cdot 9{,}81}{700 + 300} \cdot \frac{5}{0{,}04} + (700 + 300) \cdot 9{,}81 \simeq 6{,}11 \cdot 10^5\ (\text{Н}).$$

26. Тонкий стержень массой m и длиной l вращается с угловой скоростью 10 $с^{-1}$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Продолжая вращаться в той же плоскости, стержень перемещается так, что ось вращения теперь проходит через конец стержня. Найти угловую скорость во втором случае.

Дано: $\omega_1 = 10\ с^{-1}$.

Найти: ω_2.

Решение. Для решения задачи используем закон сохранения момента импульса:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{J}_i \vec{\omega}_i = \text{const}. \tag{1}$$

Для изолированной системы тел векторная сумма моментов импульсов остается постоянной.

В данной задаче за счет того, что распределение массы стержня относительно оси вращения изменяется, момент инерции стержня также изменяется. В соответствии с (1) момент импульса не изменяется:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \tag{2}$$

Известно, что момент инерции стержня J_1 относительно оси, проходящей через середину стержня (центр тяжести) и перпендикулярной ему (1-й случай), равен

$$J_1 = \frac{1}{12} ml^2, \qquad (3)$$

где m — масса стержня, l — длина стержня.

Момент инерции J_2 относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (2-й случай), найдем по теореме Штейнера:

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J — момент инерции тела относительно произвольной оси вращения, J_0 — момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, m — масса, a — расстояние от центра тяжести до выбранной оси вращения.

$$J_2 = J + ma^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \qquad (4)$$

Подставим выражения (3) и (4) в равенство (2):

$$\frac{1}{12} ml^2\omega_1 = \frac{1}{3} ml^2\omega_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1;\ \omega_2 = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2{,}5\ (\text{с}^{-1}).$$

27. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n = 10$ мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Дано: $m_1 = 180$ кг; $R = 1{,}5$ м; $n = 10$ мин$^{-1}$; $m_2 = 60$ кг.

Найти: v.

Решение. Так как платформа вращается по инерции, то момент внешних сил, относительно оси вращения Z совпадающий с геометрической осью платформы, равен нулю. При этом условии момент импульса L_z системы «платформа — человек» остается постоянным:

$$L_z = J_z\omega = \text{const}, \qquad (1)$$

где J_z — момент инерции платформы с человеком относительно оси Z; ω — угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому $J_z = J_1 + J_2$, где J_1 — момент инерции платформы, J_2 — момент инерции человека.

С учетом этого равенство (1) имеет вид:

$$(J_1 + J_2)\omega = \text{const},$$

или

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1' + J_2')\omega', \qquad (2)$$

где нештрихованные значения величин относятся к начальному состоянию системы, штрихованные — к конечному состоянию.

Момент инерции платформы (сплошного диска) относительно оси Z при переходе человека не изменяется:

$$J_1 = J_1' = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном положении (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном положении (на краю платформы) момент инерции человека

$$J_2' = m_2 R^2.$$

Подставим в формулу (2) найденные выражения моментов инерции, а также выразим начальную угловую скорость ω вращения платформы с человеком через частоту вращения n ($\omega = 2\pi n$) и конечную угловую скорость ω' — через линейную скорость v человека относительно пола ($\omega' = v/R$):

$$\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + 0\right) 2\pi n = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right) \frac{v}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$v = 2\pi n R \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}.$$

Учитывая, что $n = 10$ мин$^{-1} = \frac{1}{6}$ с$^{-1}$, получим:

$$v = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} = 0{,}942 \text{ (м/с)}.$$

28. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой 20 г поднялась на высоту 5 м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на 10 см. Массой пружины пренебречь.

Дано: $m = 20$ г $= 2 \cdot 10^{-2}$ кг; $h = 5$ м; $s = 10$ см $= 10^{-1}$ м.

Найти: k.

Решение. При зарядке пистолета сжимается пружина и совершается работа A_1, в результате чего пружина приобретает потенциальную энергию $П_1$. При выстреле потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию T_2 пули, а затем при подъеме ее на высоту h превращается в потенциальную энергию $П_2$ пули.

На основе закона сохранения энергии можно записать

$$A_1 = П_2. \qquad (1)$$

Выразим работу A_1. Сила F_1, сжимающая пружину, является переменной: в каждый момент она по направлению противоположна силе упругости F и численно равна ей. Сила упругости, возникающая в пружине при ее деформации:

$$F = -kx,$$

где x — абсолютная деформация пружины.

Работа при сжатии пружины на dx выразится формулой

$$dA_1 = F_1 dx,$$

или

$$dA_1 = kxdx.$$

Интегрируя в пределах от 0 до s, получим

$$A_1 = k\int_0^s xdx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^s = \frac{1}{2}ks^2. \qquad (2)$$

Потенциальная энергия пули на высоте s определится по формуле:

$$П_2 = mgh, \qquad (3)$$

где g — ускорение свободного падения.

Подставив в выражение (1) A_1 из (2) и $П_2$ из (3), найдем

$$\frac{1}{2}ks^2 = mgh,$$

откуда

$$k = \frac{2mgh}{s^2};\ k = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{0{,}1^2} = 190\ (\text{Н/м}).$$

29. С какой скоростью должна быть выброшена с поверхности Солнца частица, чтобы она могла удалиться в бесконечность?

Дано: $R = 6{,}95 \cdot 10^8$ м; $M = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг; $G = 6{,}67 \times \times 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2).

Найти: v.

Решение. Скорость частицы v должна быть такой, чтобы соответствующая ей кинетическая энергия E была не меньше работы A, совершаемой против сил притяжения частицы к Солнцу при удалении ее в бесконечность, т. е. $E \geqslant A$, $E = \frac{mv^2}{2} \geqslant A$, откуда $v \geqslant \sqrt{\frac{2A}{m}}$.

Работа A против силы притяжения F частицы к Солнцу будет работой переменной силы, так как F является функцией расстояния r от Солнца. По закону всемирного тяготения

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

где m — масса частицы, M — масса Солнца, G — гравитационная постоянная.

Элементарная работа dA силы F будет выражаться:

$$dA = Fdr = G\frac{mM}{r^2}dr.$$

Работа по удалению частицы с поверхности Солнца в бесконечность:

$$A = \int_R^\infty Fdr = \int_R^\infty G\frac{mM}{r^2}dr = GmM\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{GmM}{r}\Big|_R^\infty = \frac{GmM}{R},$$

где R — радиус Солнца.

Определим скорость частицы:

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2A}{m}} \geqslant \sqrt{\frac{2GmM}{mR}} \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{R}};$$

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30}}{6{,}95 \cdot 10^8}} \geqslant 6{,}16 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}.$$

30. Автомобиль на горизонтальном участке дороги развивает скорость 108 км/ч, мощность мотора 70 л. с. Определить тяговое усилие, считая его постоянным.

Дано: $v = 108$ км/ч $= 30$ м/с; $N = 70$ л. с. $= 5{,}15 \cdot 10^4$ Вт.

Найти: F.

Решение. Мощность — это работа, совершаемая в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt},$$

где dA — элементарная работа, $dA = Fds$, F — сила, ds — элементарный путь.

Тогда $N = F\frac{ds}{dt} = F \cdot v$, откуда $F = \frac{N}{v}$;

$$F = \frac{5{,}15 \cdot 10^4}{30} \simeq 1{,}72 \cdot 10^3 \text{ (Н)}.$$

31. К катящемуся по горизонтальной поверхности шару массой 1 кг приложили силу 1 Н и остановили его. Путь торможения составил 1 м. Определить скорость шара до начала торможения.

Дано: $m = 1$ кг; $F = 1$ Н; $s = 1$ м.

Найти: v.

Решение. Кинетическая энергия катящегося шара складывается из энергии поступательного и вращательного движений:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где m — масса шара, J — момент инерции, v и ω — линейная и угловая скорости, которые связаны соотношением $v = \omega r$, r — радиус шара. Момент инерции шара $J = 0{,}4mr^2$. С учетом этого

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{0{,}4mr^2}{2} \cdot \frac{v^2}{r^2} = 0{,}7mv^2.$$

Работа A тормозящей силы F на пути s

$$A = Fs$$

будет равна изменению кинетической энергии шара, которое в условии задачи равно $E_к$ (кинетическая энергия остановившегося шара равна 0).

$$A = E_к;\ Fs = 0{,}7mv^2, \text{ откуда}$$

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot s}{0{,}7m}};\ v = \sqrt{\frac{1 \cdot 1}{0{,}7}} \cong 1{,}2 \text{ (м/с)}.$$

32. Ракета установлена на поверхности Земли для запуска в вертикальном направлении. При какой минимальной скорости v_1, сообщенной ракете при запуске, она удалится от поверхности на расстояние, равное радиусу Земли ($R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м)? Всеми силами, кроме силы гравитационного взаимодействия ракеты и Земли, пренебречь.

Решение. Минимальную скорость v_1 ракеты можно определить, зная ее минимальную кинетическую энергию $E_{к1}$.

Для определения $E_{к1}$ воспользуемся законом сохранения механической энергии.

Будем считать систему «ракета — Земля» замкнутой. Единственная сила, действующая на систему, — гравитационная, относится к разряду консервативных.

Согласно закону сохранения механической энергии можно написать

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2}, \qquad (1)$$

где $E_{к1}$ и $E_{п1}$ — кинетическая и потенциальная энергии системы «ракета—Земля» в начальном состоянии (на поверхности Земли); $E_{к2}$ и $E_{п2}$ — те же величины в конечном состоянии (на расстоянии, равном радиусу Земли).

В выбранной системе отсчета кинетическая энергия Земли равна 0. Поэтому $E_{к1}$ есть просто начальная кинетическая энергия ракеты:

$$E_{к1} = \frac{1}{2} m v_1^2 .$$

Потенциальная энергия системы в начальном состоянии

$$E_{п1} = -G\frac{mM}{R},$$

где G — гравитационная постоянная, m и M — масса ракеты и масса Земли.

По мере удаления ракеты от поверхности Земли ее потенциальная энергия будет возрастать, а кинетическая — убывать. В конечном состоянии кинетическая энергия $E_{к2}$ станет равной 0, а потенциальная энергия $E_{п2}$ достигнет максимального значения:

$$E_{п2} = -G\frac{mM}{2R}.$$

Подставляя значения $E_{к1}$, $E_{п1}$, $E_{к2}$, $E_{п2}$ в выражение (1), получ

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2R},$$

откуда после сокращения на m найдем:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}}.$$

Зная, что $G\frac{M}{R^2} = g$ (g — ускорение свободного падения у поверхности Земли), перепишем эту формулу в виде

$$v_1 = \sqrt{gR},$$

что совпадает с выражением для первой космической скорости. Подставим числовые значения величин и произведем вычисления:

$$v_1 = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} \simeq 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ (м/с)}.$$

33. Какую скорость нужно сообщить ракете, чтобы она не вернулась на Землю? Сопротивление атмосферы не учитывать.

Решение. С удалением ракеты от Земли будет увеличиваться ее потенциальная энергия и уменьшаться кинетическая. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = m\left(\frac{GM}{R_0} - \frac{GM}{R}\right),$$

где m — масса ракеты; M — масса Земли; G — гравитационная постоянная; v_0 — скорость ракеты относительно Земли в начальный момент; v — скорость ракеты в рассматриваемый момент; R_0 — расстояние до ракеты от центра Земли в начальный момент; R — расстояние до ракеты от центра Земли в рассматриваемый момент; $\frac{GM}{R}$ — потенциал поля тяготения Земли на расстоянии R от центра Земли.

Сокращая обе части равенства на m и преобразовывая, получим:

$$v_0^2 - v^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

Ракета не вернется на Землю, если ее скорость $v = 0$ при $R = \infty$. В этом случае

$$v_0^2 = \frac{2GM}{R_0}. \qquad (1)$$

Из закона всемирного тяготения следует, что на поверхности Земли $G\frac{mM}{R_0^2} = mg$, откуда

$$GM = gR_0^2,$$

где $g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Подставляя значение GM в равенство (1), найдем

$$v_0^2 = \frac{2gR_0^2}{R_0}, \text{ или } v_0 = \sqrt{2gR_0}.$$

Считая, что ракета набирает нужную скорость v_0 уже вблизи поверхности Земли, и полагая радиус Земли равным 6370 км, найдем

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} \simeq$$
$$\simeq 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ (м/с)} = 11{,}2 \text{ (км/с)}.$$

Скорость, необходимая для преодоления поля тяготения Земли, называется второй космической скоростью или параболической скоростью.

34. Сплошной цилиндр скатывается с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 22°. Найти длину наклонной плоскости l, если его скорость в конце наклонной плоскости равна 7 м/с, а коэффициент трения равен 0,2.

Дано: $\alpha = 22°$; $v = 7$ м/с; $f = 0{,}2$.

Найти: l.

Решение. Увеличение скорости цилиндра происходит за счет перехода его потенциальной энергии в кинетическую.

На высоте h (рис. 10) цилиндр обладал потенциальной энергией

$$E_п = mgh = mgl\sin\alpha.$$

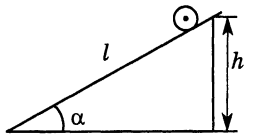


Рис. 10

При скатывании цилиндра вниз потенциальная энергия частично расходуется на работу по преодолению силы трения и переходит в кинетическую энергию, которая складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.

Работа по преодолению силы трения на пути l определяется по формуле $A = F_{тр}l$, где $F_{тр}$ — сила трения.

Сила трения равна:

$$F_{тр} = Nf,$$

где N — сила нормального давления тела на плоскость. Тогда

$$A = mgfl\cos\alpha.$$

Кинетическая энергия в конце пути

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где J — момент инерции цилиндра, $J = \frac{mr^2}{2}$; r — радиус цилиндра; ω — угловая скорость вращения $\left(\omega = \frac{v}{r}\right)$.

Произведя подстановку, получим:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{v^2}{2r^2} = \frac{3}{4} mv^2.$$

По закону сохранения энергии

$$E_п = A + E_к,$$

следовательно, $mgl\sin\alpha = mgfl\cos\alpha + \frac{3}{4} mv^2$.

Решая равенство относительно l, получим:

$$l = \frac{0{,}75v^2}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \frac{0{,}75 \cdot 49}{9{,}81(0{,}375 - 0{,}2 \cdot 0{,}927)} \simeq 19{,}8 \text{ (м)}.$$

35. Однородный шар скатывается без скольжения с плоскости, наклоненной под углом 15° к горизонту. За какое время он пройдет путь 2 м и какой будет его скорость в конце пути?

Дано: $l = 2$ м, $\alpha = 15°$, $g = 9{,}81$ м/с^2.

Найти: t, v.

Решение. Скорость шара v в конце пути l можно найти, используя закон сохранения энергии. Потенциальная энергия $E_п$ шара в начале его движения равна $E_п = mgh$, где m — масса шара, g — ускорение свободного падения, h — высота, $h = l\sin\alpha$. Значит, $E_п = mgl\sin\alpha$. В конце пути потенциальная энергия превращается в кинетическую $E_к$, которая складывается из кинетической энергии поступательного $E_{пост}$ и $E_{вр}$ вращательного движений:

$$E_к = E_{пост} + E_{вр};\ E_{пост} = \frac{mv^2}{2};\ E_{вр} = \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = \frac{2}{5} mr^2$ — момент инерции шара, r — радиус шара, $\omega = \frac{v}{r}$ — угловая скорость шара.

$$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5} mr^2 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot r^2} = 0{,}7mv^2.$$

По закону сохранения энергии $E_п = E_к$, или $mgh = 0{,}7mv^2$. Отсюда

$$gl\sin\alpha = 0{,}7v^2$$

и $$v = \sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{0{,}7}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}26}{0{,}7}} \simeq 2{,}7 \text{ (м/с)}.$$

Путь l, проходимый телом при равноускоренном движении с ускорением a, имеющим начальную скорость v_0, определяется по формуле $l = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Так как $v_0 = 0$, ускорение

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{v}{t},$$

то $$l = \frac{vt}{2}, \text{ откуда } t = \frac{2l}{v}; \; t = \frac{2 \cdot 2}{2{,}7} \approx 1{,}5 \text{ (с)}.$$

4. Элементы механики жидкостей

36. За 15 мин по трубе диаметром 2 см протекает 50 кг воды. Найти скорость течения.

Дано: $t = 15$ мин $= 9 \cdot 10^{-2}$ с; $d = 2 \cdot 10^{-2}$ м; $\rho = 10^3$ кг/м^3; $m = 50$ кг.

Найти: v.

Решение. За время t через поперечное сечение трубы S, равное $\pi d^2/4$, протекает объем воды, равный $V = Svt$, где v — скорость течения.

Плотность $\rho = m/V$, откуда $V = m/\rho$.

Подставляя выражения для V и S в формулу объема, получим

$$\frac{m}{\rho} = \frac{\pi d^2}{4} vt, \text{ откуда } v = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t}.$$

$$v = \frac{4 \cdot 50}{3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^2} \approx 0{,}18 \text{ (м/с)}.$$

37. Свинцовый шарик диаметром 2 мм падает с постоянной скоростью 3,6 см/с в сосуде, наполненном глицерином. Найти коэффициент вязкости глицерина.

Дано: $d = 0{,}2$ см; $\rho_1 = 11{,}3$ г/см^3; $\rho_2 = 1{,}2$ г/см^3; $v = 3{,}6$ см/с.

Найти: η.

Решение. На тело массой m и объемом V, движущееся в жидкости (газе), действуют три силы: $F_т = mg$ — сила тяжести; $F_A = \rho_2 Vg$ — выталкивающая сила Архимеда; $F_c = 6\pi\eta rv$ — сила сопротивления (внутреннего трения), определяемая по формуле Стокса. В случае, если тело движется равномерно, сила тяжести уравновешивается силой Архимеда и силой сопротивления, т. е. $F_т = F_A + F_c$.

$$mg = \rho_2 Vg + 6\pi\eta rv.$$

Учитывая, что

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi d^3}{6}; V = \frac{\pi d^3}{6}; r = \frac{d}{2},$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности шарика и глицерина, r и d — радиус и диаметр шарика, v — скорость опускания шарика, получим:

$$\frac{\rho_1 \pi d^3 g}{6} = \frac{\rho_2 \pi d^3 g}{6} + 3\pi\eta d v.$$

Отсюда коэффициент вязкости η будет равен:

$$\eta = \frac{(\rho_1 - \rho_2) d^2 g}{18 v} = \frac{10{,}1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}81}{18 \cdot 3{,}6} \simeq$$
$$\simeq 6{,}1 \text{ г/(см} \cdot \text{с}^2) = 0{,}61 \text{ (Па} \cdot \text{с)}.$$

38. Два свинцовых шарика диаметрами 2 и 1 мм опускают в сосуд с глицерином высотой 0,5 м. Считая, что скорость шариков сразу становится равномерной, определить, на сколько раньше и какой из шариков достигнет дна сосуда.

Дано: $d_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho_1 = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3; $d_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3; $h = 0{,}5$ м; $\eta = 0{,}61$ Па · с.

Найти: t_1, t_2.

Решение. На каждый из шариков, опускающийся в жидкости, действуют три силы — сила тяжести $F_т$; сила внутреннего трения (вязкость) $F_с$, определяемая по формуле Стокса, и выталкивающая сила — сила Архимеда $F_А$.

Если скорость v опускания шариков постоянна, то время опускания t будет равно:

$$t = h/v.$$

Для шариков, опускающихся в глицерине (см. решение предыдущей задачи), выполняется условие

$$mg = \rho_2 V g + 6\pi\eta r v.$$

Учитывая, что $v = h/t$, получим выражение для t:

$$t = \frac{6\pi r h \eta}{mg - \rho_2 V g}.$$

Подставляя выражение для r, m, V (см. решение предыдущей задачи), получим

$$t = \frac{18 h \cdot \eta}{g(\rho_1 - \rho_2) d^2}.$$

$$t_1 = \frac{18 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}61}{9{,}81(11{,}3 - 1{,}2) \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \simeq 13{,}88 \text{ (с)}.$$

$$t_2 = \frac{18 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}61}{9{,}81(11{,}3 - 1{,}2) \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \simeq 55{,}52 \text{ (с)}; \frac{t_2}{t_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = 4.$$

Шарик меньшего диаметра будет опускаться в 4 раза медленнее.

5. Элементы специальной теории относительности

39. Протон движется со скоростью 0,7 скорости света. Найти импульс и кинетическую энергию протона.

Дано: $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $\beta = 0{,}7$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: p, T.

Решение. Импульс частицы в релятивистской механике определяется по формуле

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (1)$$

$$p = mc\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (2)$$

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Подставив в формулу (2) числовые значения, получим

$$p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{0{,}7}{\sqrt{1 - 0{,}7^2}} \simeq 4{,}91 \cdot 10^{-19} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия частицы T определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 этой частицы: $T = E - E_0$, где

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; E_0 = mc^2.$$

Тогда формула T имеет вид:

$$T = mc^2\left(\frac{1}{1 - \beta^2} - 1\right).$$

Подставляя в формулу числовые значения, получим

$$T = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\left(\frac{1}{1 - 0{,}7^2} - 1\right) \simeq 6{,}02 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)}.$$

40. Космическая ракета движется с большой относительной скоростью. Релятивистское сокращение ее длины составило 36%. Определить скорость движения ракеты.

Дано: $\Delta l/\Delta l_0 = 0{,}36$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: v.

Решение. В системе координат, относительно которой ракета покоится, ее длина равна l_0. В системе координат, относительно которой ракета и связанная с ней система координат движутся со скоростью v, — равна l. Эти длины связаны соотношением

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ откуда } l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

По условию задачи:

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = 0{,}36;\ 1 - \frac{l}{l_0} = 0{,}36;\ \frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};\ 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}36;$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0{,}64^2;\ v^2 = c^2(1 - 0{,}64^2);\ v = c\sqrt{1 - 0{,}64^2} \simeq 2{,}3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

41. Прямоугольный брусок со сторонами 3,3 и 6,9 см движется параллельно большому ребру. При какой скорости движения прямоугольный брусок превратится в куб? Как скажется движение на объеме тела?

Дано: $a = 3{,}3$ см, $l_0 = 6{,}9$ см.

Найти: v, V_0/V_1.

Решение. Зависимость длины l бруска от скорости его движения v задается соотношением

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Брусок превращается в куб, когда его длина l станет равна малой стороне a. Из этого условия определяем скорость v:

$$a = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};\ \left(\frac{a}{l_0}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2};\ v^2 = c^2\left(1 - \frac{a^2}{l_0^2}\right);$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{a^2}{l_0^2}} = 3 \cdot 10^8\sqrt{1 - \frac{3{,}3^2}{6{,}9^2}} \simeq 2{,}63 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

42. С момента образования до распада π-мезон пролетел расстояние 1,35 км. Время жизни π-мезона в неподвижной системе координат равно 5 мкс. Определить время жизни π-мезона по часам в системе координат, движущейся вместе с ним.

Дано: $s = 1{,}35 \cdot 10^3$ м; $t' = 5 \cdot 10^{-6}$ с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: t.

Решение. Скорость движения π-мезона v в связанной с ним системе координат будет равна

$$v = s/t';\ v = \frac{1{,}35 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-6}} = 2{,}7 \cdot 10^8\ (\text{м/с}).$$

Продолжительность события t' в неподвижной системе координат и продолжительность событий t в системе координат, движущейся относительно неподвижной системы отсчета вместе с частицей со скоростью v, связаны соотношением:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$t = t'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$t = t'\sqrt{1 - \left(\frac{2{,}7}{3}\right)^2} = 5 \cdot 10^{-6}\sqrt{1 - 0{,}81} \simeq 2{,}2 \cdot 10^{-6}\ (\text{с}).$$

43. При какой скорости движения кинетическая энергия электрона равна 5 МэВ?

Дано: $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $T = 5$ МэВ, $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

Найти: v.

Решение. Кинетическая энергия T электрона много больше его энергии покоя E_0, поэтому вычисление скорости v следует провести по формулам релятивистской механики. Кинетическая энергия частицы равна:

$$T = E - E_0,$$

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - E_0.$$

Выразим скорость из этого уравнения:

$$v = c\frac{\sqrt{T(T + 2E_0)}}{T + E_0} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{5(5 + 1{,}022)}}{5{,}511} \simeq 2{,}99 \cdot 10^8\ (\text{м/с}).$$

44. Определить импульс электрона, обладающего кинетической энергией 5 МэВ.

Дано: $T = 5$ МэВ; $E_0 = 0{,}511$ МэВ; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: p.

Решение. Полная энергия E частицы равна

$$E = E_0 + E_к,$$

где E_0 — энергия покоя, $E_к$ — кинетическая энергия частицы.

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом имеет вид

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2,$$

где c — скорость света в вакууме.

Импульс электрона будет равен:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)};$$

$$p = \frac{\sqrt{5(5 + 2 \cdot 0{,}511)}}{c} = \frac{5{,}5}{3 \cdot 10^8} = \frac{5{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \simeq$$

$$\simeq 2{,}93 \cdot 10^{-21}\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}\right).$$

45. Протон движется со скоростью, равной 0,8 скорости света. Навстречу ему движется электрон со скоростью 0,9 скорости света. Каковы их скорости относительно друг друга? Определить полную и кинетическую энергию электрона.

Дано: $u = 0{,}8c$; $v = 0{,}9c$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

Найти: u', E, $E_к$.

Решение. Скорость u' относительного движения частиц в релятивистской механике, когда частицы движутся навстречу друг другу, определяется по теореме сложения скоростей:

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Здесь u и v — скорости движения протона и электрона, c — скорость света в вакууме.

$$u' = \frac{(0{,}8 + 0{,}9)c}{1 + \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9c^2}{c^2}} = \frac{1{,}7 \cdot 3 \cdot 10^8}{1 + 0{,}72} \simeq 2{,}97 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Полная энергия электрона $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, где m — масса электрона.

$$E = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{\sqrt{1-0{,}9^2}} \simeq 1{,}88 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) \simeq 1{,}173\ (\text{МэВ}).$$

Кинетическая энергия частицы $E_к = E - E_0$. Энергия покоя электрона $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

$$E_к = 1{,}173 - 0{,}511 = 0{,}662\ (\text{МэВ}).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Движение точки описывается уравнением $s = 2t^3 - 10t^2 + 8$. Найти скорость и ускорение точек в момент $t = 4$ с. **Ответ:** 16 м/с, 28 м/с^2.

2. Уравнение вращения твердого тела $\varphi = 3t^2 + t$. Определить частоту вращения твердого тела, угловую скорость и ускорение через 10 с после начала вращения. **Ответ:** 9,71 с$^{-1}$; 61 рад/с; 6 с$^{-2}$.

3. Материальная точка, находящаяся в покое, начала двигаться по окружности с постоянным тангенциальным ускорением 0,6 м/с^2. Определить нормальное и полное ускорение точки в конце пятой секунды после начала движения. Сколько оборотов сделает точка за это время, если радиус окружности 5 см? **Ответ:** 180 м/с^2; 180,001 м/с^2; 24.

4. Диск, вращаясь вокруг оси, проходящей через его середину, делает 180 об/мин. Определить линейную скорость вращения точек на внешней окружности диска и его радиус, если известно, что точки, лежащие ближе к оси вращения на 8 см, имеют скорость 2,8 м/с. **Ответ:** 4,33 м/с; 0,23 м.

5. Снаряд массой 20 кг, летевший горизонтально, попадает в платформу с песком массой 10^4 кг и застревает в песке. С какой скоростью летел снаряд, если платформа начала двигаться со скоростью 1 м/с? **Ответ:** 501 м/с.

6. Частица массой $6 \cdot 10^{-25}$ кг упруго соударяется с частицей массой $1{,}1 \cdot 10^{-23}$ кг, находящейся в покое. После удара первая частица движется в направлении, обратном первоначальному. Во сколько раз изменилась энергия первой частицы? **Ответ:** в 0,8 раз.

7. Катящийся цилиндр массой 2 кг остановлен силой 9,81 Н на пути 0,5 м. Вычислить скорость цилиндра до торможения. **Ответ:** 2,21 м/с.

8. Маховик и легкий шкив насажены на горизонтальную ось. К шкиву с помощью нити привязан груз, который, опускаясь равноускоренно, прошел 2 м за 4 с. Момент инерции маховика 0,05 кг · м^2. Определить массу груза, если радиус шкива 6 см. Массой шкива пренебречь. **Ответ**: 0,36 кг.

9. Во сколько раз кинетическая энергия, которую необходимо сообщить телу для удаления его за пределы земного тяготения, больше кинетической энергии, необходимой для того, чтобы это тело вывести на орбиту искусственного спутника Земли, вращающегося на высоте 3000 км над ее поверхностью? **Ответ**: в 1,51 раза.

10. Определить период обращения искусственного спутника Земли, если известно, что он вращается по круговой орбите радиусом 7800 км. **Ответ**: 1,9 ч.

11. Точка движется по окружности радиусом 15 см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки достигла значения 15 см/с. Определить нормальное ускорение точки через 16 с. **Ответ**: 1,5 см/с^2.

12. Тело массой 5 кг падает с высоты 20 м. Определить сумму его потенциальной и кинетической энергий в точке, находящейся на высоте 5 м от поверхности Земли. **Ответ**: 981 Дж.

13. Материальная точка массой 20 г движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения ее кинетическая энергия оказалась равной 6,3 мДж. Определить тангенциальное ускорение. **Ответ**: 0,1 м/с^2.

14. Полная кинетическая энергия диска, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 24 Дж. Определить кинетическую энергию поступательного и вращательного движения диска. **Ответ**: 16 Дж; 8 Дж.

15. Найти импульс, полную и кинетическую энергию электрона, движущегося со скоростью 0,9 *c*. **Ответ**: $5{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с; $1{,}87 \cdot 10^{-13}$Дж; $1{,}05 \cdot 10^{-13}$ Дж.

ЧАСТЬ 2

Основы молекулярной физики и термодинамики

Основные формулы

- Количество вещества $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$

  где N — число молекул,
  N_A — постоянная Авогадро,
  m — масса вещества,
  M — молярная масса.

- Уравнение Клапейрона—Менделеева $pV = \nu RT$

  где p —давление газа,
  V — его объем,
  R — молярная газовая постоянная,
  T — термодинамическая температура.

- Уравнение молекулярно-кинетической теории газов $p = \frac{2}{3} n_0 <E_{пост}> = \frac{1}{3} n_0 m_0 <\upsilon_{кв}>^2$

  где n_0 — концентрация молекул,
  $<E_{пост}>$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул,
  m_0 — масса молекулы,
  $<\upsilon_{кв}>$ — средняя квадратичная скорость.

- Средняя кинетическая энергия молекулы $<E> = \frac{i}{2} kT$

  где i — число степеней свободы,
  k — постоянная Больцмана.

- Внутренняя энергия идеального газа $U = \frac{i}{2} \nu RT$

- Скорости молекул:

  средняя квадратичная $<\upsilon_{кв}> = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

  средняя арифметическая $<\upsilon> = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

  наиболее вероятная $\upsilon = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

- Средняя длина свободного пробега молекулы $<\lambda> = (\sqrt{2}\pi d^2 n_0)^{-1}$

  где d — эффективный диаметр молекулы.

- Среднее число столкновений молекулы в единицу времени $\langle z \rangle = \sqrt{2}\,\pi d^2 n_0 \langle \upsilon \rangle$
- Уравнение диффузии $dm = -D\frac{d\rho}{dx}\,dSdt$

  где D — коэффициент диффузии,
  ρ — плотность,
  dS — элементарная площадка, перпендикулярная оси X.
- Уравнение теплопроводности $dQ = -\chi\frac{dT}{dx}\,dSdt$

  где χ — коэффициент теплопроводности.
- Сила внутреннего трения $dF = -\eta\frac{d\upsilon}{dx}\,dS$

  где η — динамическая вязкость.
- Коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$
- Вязкость (динамическая) $\eta = \frac{1}{3}\rho \langle \upsilon \rangle \cdot \langle \lambda \rangle = D\rho$
- Теплопроводность $\chi = c_V \rho \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \cdot \langle \lambda \rangle = \eta\, c_V$

  где c_V — удельная изохорная теплоемкость.
- Молярная теплоемкость идеального газа:

  изохорная $C_V = \frac{i}{2}R$

  изобарная $C_p = \frac{(i+2)}{2}R$
- Первое начало термодинамики $dQ = dU + dA$, $dU = \nu C_V dT$, $dA = pdV$
- Работа расширения газа при процессе:

  изобарном $A = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1)$

  изотермическом $A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$

  адиабатном $A = \nu C_V (T_1 - T_2) =$

  $= \frac{\nu R T_1}{(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] =$

  $= \frac{p_1 V_1}{(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.

- Уравнение Пуассона (уравнение адиабатного процесса) $pV^{\gamma} = \text{const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $T^{\gamma}p^{1-\gamma} = \text{const}$
- Коэффициент полезного действия цикла Карно $\eta = \dfrac{Q - Q_0}{Q} = \dfrac{T - T_0}{T}$

где Q и T — количество теплоты, полученное от нагревателя, и его температура,
Q_0 и T_0 — количество теплоты, переданное холодильнику, и его температура.

- Изменение энтропии при переходе из состояния 1 в состояние 2 $S_2 - S_1 = \int_1^2 \dfrac{dQ}{T}$
- Уравнение Ван-дер-Ваальса:
  для 1 моль газа $\left(p + \dfrac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT$
  для ν моль газа $\left(p + \dfrac{m^2}{M^2} \cdot \dfrac{a}{V^2}\right)\left(V - \dfrac{m}{M}b\right) = \nu RT$

где a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса,
V_M — объем 1 моль газа.

- Критические параметры $p_{\text{кр}} = \dfrac{a}{27b^2}$; $T_{\text{кр}} = \dfrac{8a}{27bR}$
- Собственный объем молекулы $V = \dfrac{b}{4N_{\text{A}}} = \dfrac{\pi d^3}{6}$
- Высота поднятия жидкости в капилляре радиусом r $h = \dfrac{2\sigma\cos\Theta}{\rho g r}$

Примеры решения задач

1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

1. Какое давление создают 2 г азота, занимающие объем 820 см^3 при температуре 7 °С?

Дано: $m = 2$ г $= 2 \cdot 10^{-3}$ кг; $V = 820$ см$^3 = 8{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^3; $T = 7$ °С $=$ $= 280$ К; $M = 28$ кг/кмоль; $R = 8{,}31 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К).

Найти: p.

Решение. Идеальные газы подчиняются уравнению состояния Менделеева—Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p — давление газа; V — объем газа; T — абсолютная температура газа; m — масса газа; M — масса одного киломоля газа;

R — универсальная газовая постоянная; $\frac{m}{M}$ — число киломолей газа; R — молярная газовая постоянная; $\frac{m}{M}$ — число грамм-молекул или киломолей газа: в зависимости от того, в каких единицах, г или кг, выражается масса газа.

Из уравнения состояния имеем:

$$p = \frac{mRT}{MV}; p = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 280}{28 \cdot 820 \cdot 10^{-6}} \simeq 2{,}03 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

2. Определить, сколько киломолей и молекул водорода содержится в объеме 50 м^3 под давлением 767 мм рт. ст. при температуре 18 °С. Какова плотность и удельный объем газа?

Дано: $V = 50$ м^3; $p = 767$ мм рт. ст. $\cong 767 \cdot 133$ Па; $T = 291$ К; $M = 2$ кг/кмоль.

Найти: ν, N, ρ, d.

Решение. На основании уравнения Менделеева—Клапейрона

$$pV = \nu RT$$

устанавливаем число киломолей ν, содержащихся в заданном объеме V. Зная p — давление, V — объем, T — температуру газа, R — молярную газовую постоянную можно определить ν:

$$\nu = \frac{pV}{RT}; \nu = \frac{767 \cdot 133 \cdot 50}{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 291} = 2{,}11 \text{ (кмоль)}.$$

Число молекул N, содержащееся в данном объеме, находим, используя число Авогадро N_A (которое определяет, какое количество молекул содержится в одном киломоле). Общее количество молекул, находящихся в массе m данного газа, может быть установлено, так как известно число киломолей ν.

$$N = \nu N_A.$$

Подставляя в формулу число киломолей, устанавливаем число молекул, содержащихся в объеме V:

$$N = 2{,}11 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26} = 12{,}7 \cdot 10^{26}.$$

Плотность газа $\rho = m/V$ определяем из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT;$$

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Подставляя числовые значения в единицах СИ в формулу, определим плотность газа

$$\rho = \frac{767 \cdot 1{,}33 \cdot 10^2 \cdot 2}{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 291} = 8{,}44 \cdot 10^{-2}\ (\text{кг/м}^3).$$

Удельный объем газа d определяем из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$d = \frac{V}{m} = \frac{RT}{pM};$$

$$d = \frac{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 291}{767 \cdot 133 \cdot 2} \simeq 11{,}9\ (\text{м}^3/\text{кг}).$$

3. В баллоне объемом 10 л находится гелий под давлением 1 МПа при температуре 300 К. После того как из баллона было взято 10 г гелия, температура в баллоне понизилась до 290 К. Определить давление гелия, оставшегося в баллоне.

Дано: $V = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3; $M = 4$ кг/кмоль; $p_1 = 10^6$ Па; $T_1 = 300$ К; $m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг; $T_2 = 290$ К.

Найти: p_2.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \qquad (1)$$

где m_2 — масса гелия в баллоне в конечном состоянии; M — масса одного киломоля гелия; R — молярная газовая постоянная.

Из уравнения (1) выразим искомое давление p_2:

$$p_2 = \frac{m_2}{M} \cdot \frac{RT_2}{V}. \qquad (2)$$

Массу гелия m_2 выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона:

$$m_2 = m_1 - m. \qquad (3)$$

Массу гелия m_1 найдем также из уравнения Менделеева—Клапейрона, применив его к начальному состоянию:

$$m_1 = \frac{M p_1 V}{R T_1}. \qquad (4)$$

Подставляя в выражение (3) массу m_1 по формуле (4), а затем полученное выражение m_2 в формулу (2), найдем

$$p_2 = \left(\frac{Mp_1V}{RT_1} - m\right)\frac{RT_2}{MV},$$

или после преобразования и сокращения

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}p_1 - \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_2}{V}. \qquad (5)$$

$$p_2 = \frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 10^3}{10^{-2}} \cdot 290 \text{ (Па)} \simeq 3{,}64 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

4. В сосуде емкостью 8,3 л находится воздух при нормальном давлении и температуре 300 К. В сосуд вводят 3,6 г воды и закрывают крышкой. Определить давление в сосуде при 400 К, если вся вода при этой температуре превращается в пар.

Дано: $V = 8{,}3$ л $= 8{,}3 \cdot 10^{-3}$ м^3; $T_0 = 300$ К; $m = 3{,}6$ г $= 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг; $T_1 = 400$ К.

Найти: p.

Решение. Давление в сосуде складывается из давления воздуха, нагретого до температуры T_1, и давления водяных паров при той же температуре.

Из объединенного газового закона $p_0V/T_0 = p_1V/T_1$ находим давление воздуха:

$$p_1 = \frac{p_0T_1}{T_0}.$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона $p_2V/T_1 = mR/M$ найдем давление водяных паров

$$p_2 = \frac{mTR}{MV},$$

где $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водяного пара; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная.

По закону Дальтона для смеси газов $p = p_1 + p_2$ найдем давление газа в сосуде:

$$p = p_0\frac{T_1}{T_0} + \frac{mT_1}{MV}R,$$

где $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Тогда

$$p = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 400}{300} + \frac{3{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 400}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31 = 2{,}15 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

5. В баллоне содержится кислород $m_1 = 80$ г и аргон $m_2 = 320$ г. Давление смеси $p = 1$ МПа, температура $T = 300$ К. Принимая данные газы за идеальные, определить емкость V баллона.

Дано: $m_1 = 8 \cdot 10^{-2}$ кг; $M_1 = 32$ кг/кмоль; $m_2 = 0{,}32$ кг; $M_2 = 40$ кг/кмоль; $p = 10^6$ Па; $T = 300$ К.

Найти: V.

Решение. По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси.

По уравнению Менделеева—Клапейрона парциальные давления кислорода p_1 и аргона p_2 выражаются формулами:

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{RT}{V} \text{ и } p_2 = \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Следовательно, по закону Дальтона давление смеси газов:

$$p = p_1 + p_2, \text{ или } p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}.$$

Откуда емкость баллона:

$$V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p}. \quad (1)$$

$$V = \left(\frac{0{,}08}{32} + \frac{0{,}32}{40}\right) \cdot \left(\frac{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 300}{10^6}\right) \simeq 0{,}0262 \text{ (м}^3\text{)} \simeq 26{,}2 \text{ (л)}.$$

6. В сосуде объемом 2 м^3 находится смесь 4 кг гелия и 2 кг водорода при температуре 27 °С. Определить давление и молярную массу смеси газов.

Дано: $V = 2$ м^3; $m_1 = 4$ кг; $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m_2 = 2$ кг; $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К.

Найти: p, M.

Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона, применив его к гелию и водороду:

$$p_1 V = \frac{m_1 RT}{M_1}, \quad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2 RT}{M_2}, \quad (2)$$

где p_1 — парциальное давление гелия; m_1 — масса гелия; M_1 — его молярная масса; V — объем сосуда; T — температура газа; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная; p_2 — парциальное давление водорода; m_2 — масса водорода; M_2 — его молярная масса.

По закону Дальтона:

$$p = p_1 + p_2. \tag{3}$$

Из уравнений (1) и (2) выразим p_1 и p_2 и подставим в уравнение (3):

$$p = \frac{m_1 RT}{M_1 V} + \frac{m_2 RT}{M_2 V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \tag{4}$$

Найдем молярную массу смеси газов по формуле

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}, \tag{5}$$

где ν_1 и ν_2 — число молей гелия и водорода соответственно. Число молей газов найдем по формулам:

$$\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}, \tag{6}$$

$$\nu_2 = \frac{m_2}{M_2}. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в формулу (5), найдем

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}}. \tag{8}$$

$$p = \left(\frac{4}{4 \cdot 10^{-3}} + \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}}\right)\frac{8{,}31 \cdot 300}{2} \simeq 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

$$M = \frac{4 + 2}{\dfrac{4}{4 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{2}{2 \cdot 10^{-3}}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}.$$

7. В резервуаре объемом 1,2 м^3 находится смесь 10 кг азота и 4 кг водорода при температуре 300 К. Определить давление и молярную массу смеси газов.

Дано: $V = 1{,}2$ м^3; $m_1 = 10$ кг; $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $m_2 = 4$ кг; $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К.

Найти: p, M.

Решение. Воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона, применив его к азоту и водороду:

$$p_1 V = \frac{m_1 RT}{M_1}; \tag{1}$$

$$p_2V = \frac{m_2RT}{M_2}, \tag{2}$$

где p_1 — парциальное давление азота; m_1 — масса азота; M_1 — молярная масса азота; V — объем резервуара; T — температура газа; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная; p_2 — парциальное давление водорода; m_2 — масса водорода; M_2 — молярная масса водорода.

По закону Дальтона:

$$p = p_1 + p_2. \tag{3}$$

Из уравнений (1) и (2) выразим p_1 и p_2 и подставим в уравнение (3):

$$p = \frac{m_1RT}{M_1V} + \frac{m_2RT}{M_2V} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}. \tag{4}$$

Найдем молярную массу смеси газов по формуле

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}, \tag{5}$$

где m_1 — масса азота; m_2 — масса водорода; ν_1 — количество молей азота; ν_2 — количество молей водорода.

Количество молей азота и водорода ν_1 и ν_2 найдем по формулам:

$$\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}; \tag{6}$$

$$\nu_2 = \frac{m_2}{M_2}. \tag{7}$$

Подставляя формулы (6) и (7) в выражение (5), найдем

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2}. \tag{8}$$

Вычислим:

$$p = \left(\frac{10}{28 \cdot 10^{-3}} + \frac{4}{2 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot \frac{8{,}31 \cdot 300}{1{,}2} \simeq 4{,}9 \cdot 10^6 \text{ (Па)};$$

$$M = \frac{10 + 4}{\frac{10}{28 \cdot 10^{-3}} + \frac{4}{2 \cdot 10^{-3}}} \simeq 6 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}.$$

8. В закрытом сосуде емкостью 3 м^3 находятся 1,4 кг азота и 2 кг гелия. Определить температуру газовой смеси и парциальное давление гелия, если парциальное давление азота равно $1{,}3 \cdot 10^5$ Па.

Дано: $V = 3$ м^3; $m_1 = 1{,}4$ кг; $M_1 = 28$ кг/кмоль; $m_2 = 2$ кг; $M_2 = 4$кг/кмоль; $p_1 = 1{,}34 \cdot 10^5$ Па.

Найти: T, p_2.

Решение. Парциальное давление гелия и температура газовой смеси определяются из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT; \tag{1}$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT. \tag{2}$$

Из (1) находим температуру

$$T = \frac{P_1 V M_1}{m_1 R},$$

и потом из (2) можно определить парциальное давление гелия

$$p_2 = \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{R p_1 V M_1}{m_1 R V} = \frac{m_2 M_1 p_1}{m_1 M_2}. \tag{3}$$

Подставим все величины в формулы (1) и (3), проведем вычисления температуры и давления:

$$T = \frac{1{,}3 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 28}{1{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} \simeq 939 \text{ (К)},$$

$$p_2 = \frac{2 \cdot 28 \cdot 1{,}3 \cdot 10^5}{1{,}4 \cdot 4} \simeq 1{,}3 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

9. Какой объем занимает смесь 1 кг кислорода и 2 кг гелия при нормальных условиях? Какова молярная масса смеси?

Дано: $m_1 = 1$ кг; $m_2 = 2$ кг; $M_1 = 32$ кг/кмоль; $M_2 = 4$ кг/кмоль; $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $T = 273$ К.

Найти: V, $M_{см}$.

Решение. Обозначим через m_1 и M_1 — массу и молярную массу кислорода, через m_2 и M_2 — массу и молярную массу гелия.

Для смеси газов справедлив закон Дальтона:

$$p = p_1 + p_2,$$

где p_1 и p_2 — парциальные давления, определяемые из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{M_1 V}; p_2 = \frac{m_2 RT}{M_2 V},$$

где T — температура, V — объем сосуда, в котором смешаны газы, R — молярная газовая постоянная.

Тогда

$$p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}; V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p}. \quad (1)$$

Молекулярная масса смеси определяется по уравнению Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m_{см} \cdot RT}{M_{см}} = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT,$$

поэтому

$$M_{см} = \frac{m_{см}}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}} = \frac{(m_1 + m_2) M_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1}.$$

Производим вычисления

$$V = \left(\frac{1}{32} + \frac{2}{4}\right)\frac{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 273}{1{,}01 \cdot 10^5} \simeq 12 \text{ (м}^3\text{)};$$

$$M_{см} = \frac{(1+2) \cdot 32 \cdot 4}{1 \cdot 4 + 2 \cdot 32} \simeq 5{,}65 \text{ (кг/кмоль)}.$$

10. Сосуд емкостью 2 л содержит азот при температуре 27 °С и давлении 0,5 атм. Найти число молекул в сосуде, число столкновений между всеми молекулами за 1 с, среднюю длину свободного пробега молекул.

Дано: $V = 2$ л $= 2 \cdot 10^{-3}$ м^3; $T = 27$ °С $= 300$ К; $p = 0{,}5$ атм $= 5{,}065 \cdot 10^4$ Н/м^2; $M = 28$ кг/кмоль; $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: n, z, $\langle\lambda\rangle$.

Решение. Число молекул в сосуде найдем исходя из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

В газе массой m содержится n молекул газа, так что $m = nm_0$, где m_0 — масса отдельной молекулы, а в одном киломоле вещества содержится число молекул, равное числу Авогадро ($N_A = 6{,}01 \cdot 10^{26}$ 1/кмоль). Поэтому $M = m_0 N_A$. Следовательно,

$$pV = \frac{n}{N_A} RT;\ n = \frac{pN}{RT} N_A. \qquad (1)$$

Число столкновений каждой молекулы с остальными за 1 с:

$$<z> = \frac{<\upsilon>}{<\lambda>},$$

где $<\upsilon> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ — средняя арифметическая скорость.

Средняя длина свободного пробега молекул газа $<\lambda>$ определяется формулой:

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0},$$

где d — эффективный диаметр молекулы, n_0 — число молекул в единице объема.

Исходя из уравнения (1),

$$n_0 = \frac{n}{V} = \frac{pN_A}{TR} = \frac{p}{kT},$$

где $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Поэтому для числа столкновений каждой молекулы за 1 с получим:

$$<z> = \sqrt{2}\,\pi d^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{p}{kT}. \qquad (2)$$

Общее число столкновений за 1 с равно:

$$z = \frac{1}{2} n \cdot <z>.$$

Согласно уравнениям (1) и (2) имеем:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi d^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{p^2 V}{k^2 T^2}. \qquad (3)$$

Длина свободного пробега:

$$<\lambda> = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Производим вычисления в СИ:

$$n = \frac{5{,}065 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}}{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 300} \simeq 2{,}45 \cdot 10^{22} \text{ молекул};$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20} \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 300}{3{,}14 \cdot 28}} \times$$

$$\times \frac{5{,}065^2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 9 \cdot 10^4} = 3{,}04 \cdot 10^{31} \text{ (с}^{-1}\text{)};$$

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20} \cdot 5{,}065 \cdot 10^4} = 1{,}92 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

11. Найти число молекул азота в 1 м^3, если давление равно 3,69 атм, а средняя квадратичная скорость молекул равна 2400 м/с.

Дано: $V = 1$ м^3; $p = 3{,}69 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $\langle v_{кв}\rangle = 2{,}4 \cdot 10^3$ м/с; $M = 28$ кг/кмоль.

Найти: n_0.

Решение. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов имеет вид

$$p = \frac{1}{3} n_0 m \langle v_{кв}\rangle^2, \qquad (1)$$

где p — давление; n_0 — количество молекул в единице объема газа; m — масса одной молекулы; $\langle v_{кв}\rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул.

Масса одной молекулы равна

$$m = \frac{M}{N_A}, \qquad (2)$$

где M — масса 1 моля газа; N_A — число Авогадро — $6{,}02 \times \times 10^{26}$ кмоль$^{-1}$.

Используя (1) и (2), получим

$$n_0 = \frac{3PN_A}{M\langle v_{кв}\rangle^2},$$

$$n_0 = \frac{3 \cdot 3{,}74 \cdot 10^5 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}}{28 \cdot 2{,}4^2 \cdot 10^6} \simeq 4{,}2 \cdot 10^{24} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

12. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода $\langle\lambda\rangle = 2{,}5$ см при температуре 68 °С? Диаметр молекул водорода принять равным $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

Дано: $\langle\lambda\rangle = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м; $T = 341$ К; $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$.

Найти: p.

Решение. Давление водорода при температуре T можно найти по уравнению Менделеева—Клапейрона, в котором удобно ввести число молекул n в 1 м^3. Это проводится следующим образом:

$$pV = RT;\ p = \frac{RT}{V},$$

но $R = N_A k$, где N_A — число Авогадро и k — постоянная Больцмана. Следовательно, $p = \frac{N_A}{V} kT$. Так как $\frac{N_A}{V} = n_0$, имеем $p = n_0 kT$.

Число молекул в 1 м^3 выразим через среднюю длину свободного пробега. Из формулы $\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}$ находим $n_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle\lambda\rangle}$. Таким образом,

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 \langle\lambda\rangle} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 341}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}3^2 \cdot 10^{-20} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} \simeq 0{,}8 \text{ (Па)}.$$

13. Вакуумная система заполнена водородом при давлении 10^{-3} мм рт. ст. Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул водорода при таком давлении, если $t = 50$ °С.

Дано: $p = 10^{-3}$ мм рт. ст. = 0,133 Па; $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м; $T = 50$ °С = 323 К.

Найти: $\langle\lambda\rangle$.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул определяется по формуле:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0},$$

где d — эффективный диаметр молекулы; n_0 — число молекул в единице объема.

Из молекулярно-кинетической теории газов известно, что $p = n_0 kT$, или $n_0 = \frac{p}{kT}$.

Произведем подстановку

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p},$$

где k — постоянная Больцмана; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T — температура; p — давление.

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 323}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-20} \cdot 0{,}133} \simeq 0{,}143 \text{ (м)}.$$

14. Определить среднюю длину свободного пробега молекул и число соударений за 1 с, происходящих между всеми молекулами кислорода, находящегося в сосуде емкостью 2 л при температуре 27 °С и давлении 100 кПа.

Дано: $V = 2\text{ л} = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К; $p = 100$ кПа $= 10^5$ Па; $d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: $\langle\lambda\rangle$, z.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул кислорода вычисляется по формуле

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \tag{1}$$

где d — эффективный диаметр молекулы кислорода; n_0 — число молекул в единице объема, которое можно определить из уравнения

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \tag{2}$$

где k — постоянная Больцмана.

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \tag{3}$$

Число соударений z, происходящих между всеми молекулами за 1 с, равно

$$z = \frac{1}{2}\langle z\rangle N, \tag{4}$$

где N — число молекул кислорода в сосуде объемом $2 \cdot 10^{-3}$ м; $\langle z\rangle$ — среднее число соударений одной молекулы за 1 с. Число молекул в сосуде

$$N = nV. \tag{5}$$

Среднее число соударений молекулы за 1 с равно

$$\langle z\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle}, \tag{6}$$

где $\langle v\rangle$ — средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{7}$$

Подставляя в (4) выражения (5), (6) и (7), находим

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi d^2 p}{kT} \cdot \frac{p}{kT} V = \frac{2\pi d^2 p^2 V}{k^2 T^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Произведем вычисления:

$$z = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1{,}38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 9 \cdot 10^4} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 300}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} = 9{,}7 \cdot 10^{31}\ (\text{с}^{-1});$$

$$<\lambda> = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5} \simeq 1{,}11 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

15. Найти плотность азота, если молекула за 1 с испытывает $2{,}05 \cdot 10^8$ с$^{-1}$ столкновений при температуре 280 К. Какова средняя длина свободного пробега молекул?

Дано: $<z> = 2{,}05 \cdot 10^8$ с$^{-1}$; $T = 280$ К; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Найти: p, $<\lambda>$.

Решение. Плотность азота определяется по формуле

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{1}$$

где m — масса азота; V — объем.

Массу азота можно выразить через число молекул в данном объеме и массу одной молекулы:

$$m = m_1 N. \tag{2}$$

Массу m_1 одной молекулы можно найти делением массы одного моля на постоянную Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A}. \tag{3}$$

Число молекул, содержащихся в газе некоторого объема V, равно

$$N = n_0 V, \tag{4}$$

где n_0 — концентрация молекул. Подставляя (4) и (3) в (2), имеем

$$m = \frac{M n_0 V}{N_A}; \tag{5}$$

далее, подставляя (5) в (1), получаем

$$\rho = \frac{M n_0}{N_A}. \tag{6}$$

Концентрацию молекул находим из формулы для числа столкновений:

$$<z> = \sqrt{2}\,\pi d^2 n_0 <v_{ар}>, \text{ откуда}$$

$$n_0 = \frac{<z>}{(\sqrt{2}\pi d^2 <v_{ар}>)}, \tag{7}$$

где $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м — эффективный диаметр молекулы азота; $<v_{ар}>$ — средняя арифметическая скорость молекул;

$$<v_{ар}> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{8}$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура. Подставляя величину $<v_{ар}>$ из (8) в (7), получим

$$n_0 = \frac{<z>}{4d^2\sqrt{\frac{\pi RT}{M}}}. \tag{9}$$

Подставляя величину n_0 из (9) в (6), имеем

$$\rho = \frac{M<z>}{N_A 4d^2\sqrt{\frac{\pi RT}{M}}}. \tag{10}$$

Среднюю длину свободного пробега молекул азота находим по формуле

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}.$$

Используя соотношение (9), получаем

$$<\lambda> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{<z>}. \tag{11}$$

Произведем вычисления:

$$\rho = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{2{,}05 \cdot 10^8}{4 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20}\sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 8{,}31 \cdot 280}{28 \cdot 10^{-3}}}} \simeq$$

$$\simeq 4{,}86 \cdot 10^{-2}\ (\text{кг/м}^3).$$

$$<\lambda> = \frac{1}{2{,}05 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 280}{3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \simeq 2{,}24\ (\text{мкм}).$$

16. Определить среднюю длину свободного пробега молекул и число соударений за 1 с, происходящих между всеми молекулами азота, в сосуде емкостью 4 л, содержащегося при нормальных условиях.

Дано: $V = 4$ л $= 4 \cdot 10^{-3}$ м^3; $M = 28$ кг/кмоль; $T = 273$ К; $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: z, $\langle\lambda\rangle$.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул азота $\langle\lambda\rangle$ может быть найдена, если известно число молекул в единице объема n_0 и эффективный диаметр молекулы d:

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}. \qquad (1)$$

Число молекул в единице объема n_0 определяется из формулы давления, полученной на основании уравнения молекулярно-кинетической теории газов $p = n_0 kT$. Отсюда следует, что

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \qquad (2)$$

где k — постоянная Больцмана. В окончательном виде формула (1) имеет вид

$$\langle\lambda\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}, \qquad (1, a)$$

диаметр d находим по таблицам.

Число соударений z, происходящих между всеми молекулами за 1 с, можно вычислить по известному общему числу молекул n, а также по числу соударений $\langle z\rangle$ каждой молекулы с остальными за 1 с, т. е.

$$z = \frac{1}{2} n \langle z\rangle. \qquad (3)$$

Общее число молекул в сосуде n найдем по формуле

$$n = \frac{pVN_A}{RT}, \qquad (4)$$

где N_A — число Авогадро.

Среднее число соударений одной молекулы за 1 с получим, если ее среднюю арифметическую скорость $\langle v\rangle$ разделим на длину свободного пробега $\langle\lambda\rangle$:

$$\langle z\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle\lambda\rangle}. \qquad (5)$$

Средняя арифметическая скорость молекул:

$$<v> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (6)$$

Подставляя в (5) выражения (6) и (1, *а*), находим число соударений каждой молекулы за 1 с:

$$<z> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\,\frac{\sqrt{2}\pi d^2 p}{kT} = \frac{4\pi d^2 p}{kT}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}. \qquad (7)$$

Общее число соударений за 1 с между всеми молекулами вычисляем, используя соотношения (3), (4) и (7):

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{pVN_A}{RT}\,\frac{4\pi d^2 p}{kT}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}} = \frac{2\pi d^2 p^2 V}{k^2 T^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$z = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20} \cdot 1{,}01^2 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1{,}38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 273^2}\sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 273}{3{,}14 \cdot 28}} \simeq$$
$$\simeq 2{,}79 \cdot 10^{32}\ (\text{с}^{-1});$$

$$<\lambda> = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2}\pi \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20} \cdot 1{,}01 \cdot 10^{-5}} = 8{,}74 \cdot 10^{-8}\ (\text{м}).$$

17. Определить плотность разреженного азота, если средняя длина свободного пробега молекул 10 см. Какова концентрация молекул?

Дано: $<\lambda> = 10$ см $= 0{,}1$ м.

Найти: ρ, n_0.

Решение. Средняя длина свободного пробега молекул определяется формулой

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \qquad (1)$$

где d — эффективный диаметр молекул (для азота $d = 0{,}31 \cdot 10^{-9}$ м).

Концентрацию молекул определим из равенства:

$$n_0 = \frac{mN_A}{MV} = \rho\frac{N_A}{M}, \qquad (2)$$

где N_A — постоянная Авогадро; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса азота.

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 <\lambda>} = \rho\frac{N_A}{M};\ \rho = \frac{M}{\sqrt{2}\pi d^2 <\lambda> N_A} = \frac{n_0 M}{N_A};$$

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot 3{,}1^2\cdot 10^{-20}\cdot 0{,}1} \simeq 2{,}34\cdot 10^{19}\ (\text{м});$$

$$\rho = 2{,}34\cdot 10^{19}\cdot\frac{28}{6{,}02\cdot 10^{26}} = 1{,}09\cdot 10^{-6}\ (\text{кг/м}^3).$$

18. Определить коэффициент внутреннего трения для водорода, имеющего температуру 27 °С.

Дано: $M = 2$ кг/кмоль; $T = 27$ °С $= 300$ К; $d = 2{,}3\cdot 10^{-10}$ м; $N_A = 6{,}02\cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$; $R = 8{,}31\cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К).

Найти: η.

Решение. Из молекулярно-кинетической теории газов коэффициент внутреннего трения равен

$$\eta = \frac{1}{3}\rho <v><\lambda>, \qquad (1)$$

где ρ — плотность газа, $<v>$ — средняя арифметическая скорость молекул; $<\lambda>$ — средняя длина свободного пробега.

Плотность из уравнения Менделеева—Клапейрона равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}; \qquad (2)$$

где m, V, p и T — масса, объем, давление и температура газа, M — молярная масса водорода, R — молярная газовая постоянная;

средняя арифметическая скорость молекул равна:

$$<v> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \qquad (3)$$

средняя длина свободного пробега равна:

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \qquad (4)$$

где d — эффективный диаметр молекулы водорода, n_0 — число молекул водорода в 1 м^3.

Давление и температура газа связаны соотношением

$$p = n_0 kT, \qquad (5)$$

откуда

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \tag{6}$$

а k в свою очередь равно

$$k = \frac{R}{N_A}, \tag{7}$$

где N_A — число Авогадро.

Подставляя (2), (3) и (8) в уравнение (1), получим

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \frac{PM}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{RT}{\sqrt{2}\pi d^2 P N_A} = \frac{\sqrt{8MRT}}{3\sqrt{2\pi^3} d^2 N_A}.$$

$$\eta = \frac{\sqrt{8 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 300}}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot 3{,}14^3} \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-10} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}} = 8{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ (кг/м} \cdot \text{с)}.$$

19. Вычислить коэффициент внутреннего трения и коэффициент диффузии кислорода, находящегося при давлении 0,2 МПа и температуре 280 К.

Дано: $p = 2 \cdot 10^5$ Па; $d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 280$ К.

Найти: η, D.

Решение. На основании представлений молекулярно-кинетической теории газов коэффициент внутреннего трения идеального газа (динамическая вязкость) и коэффициент диффузии определяются по формулам:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho <\lambda><v_{ар}>; \tag{1}$$

$$D = \frac{1}{3} <\lambda><v_{ар}>, \tag{2}$$

где ρ — плотность газа; $<\lambda>$ — средняя длина свободного пробега молекул; $<v_{ар}>$ — средняя арифметическая скорость молекул.

Из (1) и (2) следует

$$\eta = \rho D. \tag{3}$$

Среднюю арифметическую скорость и среднюю длину свободного пробега молекул находим по формулам:

$$<v_{ар}> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \tag{4}$$

$$<\lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \qquad (5)$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; $d = 2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м — эффективный диаметр молекулы кислорода; n_0 — число молекул в 1 м^3 (концентрация).

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов определяем n_0:

$$n_0 = \frac{p}{kT}, \qquad (6)$$

где p — давление; k — $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Подставляя (6) в уравнение (5), получаем:

$$<\lambda> = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \qquad (7)$$

Окончательный вид расчетной формулы для коэффициента диффузии найдем, подставляя выражения (4) и (7) в (2):

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{2kT}{3\pi d^2 p}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}. \qquad (8)$$

Плотность кислорода определяется по формуле (6), рассмотренной ранее в задаче 15: $\rho = \frac{M n_0}{N_A}$. С учетом (6) имеем:

$$\rho = \frac{Mp}{N_A kT}. \qquad (9)$$

Подставляя (9) и (8) в (3), получаем расчетную формулу для коэффициента внутреннего трения:

$$\eta = \frac{2}{3\pi\sqrt{\pi} d^2 N_A}\sqrt{MRT}.$$

Вычисляем:

$$D = \frac{2}{3} \cdot \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 280}{3{,}14 \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20} \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 280}{3{,}14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \simeq$$
$$\simeq 7{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^2\text{/с)};$$

$$\eta = \frac{2\sqrt{32 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 280}}{3 \cdot 3{,}14\sqrt{3{,}14} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23} \cdot 2{,}9^2 \cdot 10^{-20}} \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ (кг/(м} \cdot \text{с))}.$$

20. Определить коэффициент диффузии и коэффициент внутреннего трения азота, находящегося при температуре 300 К и давлении 10^5 Па.

Дано: $\rho_0 = 1{,}25$ кг/м^3; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 300$ К; $p = 10^5$ Па; $d = 3{,}1 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: D, η.

Решение. Коэффициент диффузии определяется по формуле:

$$D = \frac{1}{3} <\upsilon><\lambda>, \tag{1}$$

где $<\upsilon>$ — средняя арифметическая скорость молекул, равная

$$<\upsilon> = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \tag{2}$$

$<\lambda>$ — средняя длина свободного пробега молекул. Для нахождения $<\lambda>$ воспользуемся формулой, взятой из решения примера 19:

$$<\lambda> = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в выражение (1), имеем

$$D = \frac{1}{3\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{2kT}{3\pi d^2 p}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}. \tag{4}$$

Коэффициент внутреннего трения:

$$\eta = \frac{1}{3} <\upsilon><\lambda>\rho, \tag{5}$$

где ρ — плотность газа при температуре 300 К и давлении 10^5 Па. Для нахождения ρ воспользуемся уранением состояния газа. Запишем его для двух состояний азота — при нормальных условиях ($T_0 = 273$ К, $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па) и при условиях данной задачи:

$$p_0 V_0 = (m/M)RT_0; \; pV = (m/M)RT. \tag{6}$$

Учитывая, что $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$, $\rho = \frac{m}{V}$, имеем

$$\rho = \frac{\rho_0 p T_0}{(p_0 T)}. \tag{7}$$

Коэффициент внутреннего трения газа может быть выражен через коэффициент диффузии (см. (1) и (5)):

$$\eta = D\rho = \frac{D\rho_0 p T_0}{p_0 T}. \qquad (8)$$

Подставляя числовые значения в (4) и (8), получим:

$$D = \frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}1^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5} \cdot \sqrt{\frac{8{,}31 \cdot 300}{3{,}14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \simeq 1{,}54 \cdot 10^{-5}\ (\text{м}^2/\text{с});$$

$$\eta = 1{,}54 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}25 \cdot \frac{10^5 \cdot 273}{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 300} \simeq$$

$$\simeq 1{,}73 \cdot 10^{-5}\ (\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})).$$

21. Наружная поверхность кирпичной стены площадью 25 м^2 и толщиной 37 см имеет температуру 259 К, а внутренняя поверхность — 293 К. Помещение отапливается электроплитой. Определить ее мощность, если температура в помещении поддерживается постоянной. Теплопроводность кирпича 0,4 Вт/(м · К).

Дано: $S = 25$ м^2; $d = 37$ см $= 0{,}37$ м; $T_1 = 259$ К; $T_2 = 293$ К; $\chi = 0{,}4$ Вт/(м · К).

Найти: N.

Решение. Количество теплоты, прошедшее через наружную стену, определим по закону Фурье:

$$Q = -\chi \frac{T_1 - T_2}{d} St, \qquad (1)$$

где t — время протекания теплоты.

За время t электроплита должна выделить такое же количество теплоты

$$Q = Nt. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем

$$Nt = -\chi(T_1 - T_2)St/d, \text{ откуда } N = -\chi \frac{T_1 - T_2}{d} S;$$

$$N = -0{,}4 \cdot \frac{259 - 293}{0{,}37} \cdot 25 = 0{,}92\ (\text{кВт}).$$

22. Вычислить количество льда, которое образуется в течение часа в бассейне, площадь которого 10 м^2. Толщина льда 15 см, температура воздуха −10 °С, коэффициент теплопроводности льда $\chi = 2{,}1$ Вт/(м · К).

Дано: $S = 10$ м^2; $\Delta x = 15$ см $= 0{,}15$ м; $t_1 = -10$ °С; $t_2 = 0$ °С; $\chi = 2{,}1$ Вт/(м · К); $\tau = 1$ ч $= 3600$ с; $r = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Найти: m.

Решение. Считаем процесс установившимся, температуру нижней поверхности льда равной 0 °С, а верхней — температуре воздуха. Через слой льда от воды отводится тепло. Количество тепла Q, передаваемое через лед толщиной Δx, пропорционально градиенту температуры $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, площади передающей поверхности S и времени τ и определяется уравнением теплопроводности Фурье:

$$Q = \chi \frac{\Delta t}{\Delta x} S\tau.$$

Массу m образующегося льда определяем из уравнения для теплоты плавления Q льда, численно равной теплоте, отводимой от воды в процессе замораживания

$$Q = mr,$$

где r — удельная теплота плавления льда.

Тогда

$$m = \frac{Q}{r} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{\chi}{r} \cdot S \cdot \tau;$$

$$m = \frac{10 \cdot 2{,}1 \cdot 10 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3}{0{,}15 \cdot 3{,}35 \cdot 10^5} \approx 15 \text{ (кг)}.$$

2. Основы термодинамики

23. Давление газа 750 мм рт. ст., температура 27 °С. Определить концентрацию молекул и среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы.

Дано: $p = 750$ мм рт. ст.; $t = 27$ °С.

Найти: n_0, ε.

Решение. По основному уравнению кинетической теории газов

$$\varepsilon = \frac{3}{2} kT.$$

Вычисляем:

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6{,}21 \cdot 10^{-21} \text{ (Дж)}.$$

Концентрацию молекул n_0 найдем из уравнения $p = n_0 kT$, где p — давление газа ($p = 750 \cdot 133$ Па). Находим n_0:

$$n_0 = \frac{p}{kT}; \; n_0 = \frac{750 \cdot 133}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{25} \text{ (1/м}^3\text{)}.$$

24. Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения молекул, содержащихся в 2 кг водорода при температуре 400 К?

Дано: $m = 2$ кг; $T = 400$ К; $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: $<E_{\text{пост}}>$, $<E_{\text{вр}}>$.

Решение. Считаем водород идеальным газом. Молекула водорода — двухатомная. Связь между атомами считаем жесткой, тогда число степеней свободы молекулы водорода равно 5. В среднем на одну степень свободы приходится энергия

$$<E_i> = \frac{kT}{2}.$$

Поступательному движению приписывается три ($i = 3$), а вращательному две ($i = 2$) степени свободы. Тогда энергия одной молекулы

$$<E_{\text{пост}}> = \frac{3}{2}kT;$$

$$<E_{\text{вр}}> = \frac{2}{2}kT.$$

Число молекул, содержащихся в массе газа m,

$$N = \nu N_{\text{A}} = \frac{m}{M}N_{\text{A}},$$

где ν — число молей; N_{A} — постоянная Авогадро. Тогда средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул водорода будет

$$<E_{\text{пост}}> = \frac{m}{M}N_{\text{A}}\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT, \qquad (1)$$

где $R = kN_{\text{A}}$ — молярная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$<E_{\text{вр}}> = \frac{m}{M}RT. \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения и формулы (1) и (2), имеем

$$<E_{\text{пост}}> = \frac{3 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 400}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 49{,}86 \cdot 10^5 \text{ (Дж)} = 4986 \text{ (кДж)};$$

$$<E_{\text{вр}}> = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 400}{2 \cdot 10^{-3}} = 33{,}24 \cdot 10^5 \text{ (Дж)} = 3324 \text{ (кДж)}.$$

25. Газ, занимавший объем 20 л при нормальных условиях, был изобарически нагрет до 80 °С. Определить работу расширения газа.

Дано: $V_1 = 20$ л $= 2 \cdot 10^{-2}$ м^3; $p_1 = p_2 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $T_1 = 273$ К; $T_2 = 353$ К.

Найти: A.

Решение. Работа расширения газа A при изобарическом процессе определяется по следующей формуле:

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Число молей газа $\frac{m}{M}$ определим из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1, \text{ или } \frac{m}{M} = \frac{p_1 V_1}{RT_1}.$$

Тогда

$$A = \frac{p_1 V_1 \Delta T}{T_1}.$$

$$A = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 80}{273} \approx 592 \text{ (Дж)}.$$

26. Определить скорость вылета поршня массой 4 кг из цилиндра при адиабатном расширении воздуха в 40 раз, если начальное давление воздуха 10^7 Па, а объем 0,3 л.

Дано: $m = 4$ кг; $V_2/V_1 = 40$; $p_1 = 10^7$ Па; $V_1 = 0{,}3$ л $= 3 \cdot 10^{-4}$ м^3.

Найти: v.

Решение. Работа A, совершаемая адиабатически расширяющимся воздухом, в данном случае идет на увеличение кинетической энергии поршня, т. е.

$$A = \frac{mv^2}{2},$$

где m и v — масса и скорость поршня.

Для подсчета работы адиабатически расширяющегося газа воспользуемся формулой:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

где γ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме (для воздуха $\gamma = 1{,}4$).

$$A = \frac{10^7 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3}}{0{,}4}(1 - 0{,}22) = 5{,}85 \cdot 10^3 \text{ (Па)}.$$

Так как $A = \frac{mv^2}{2}$, то

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m}};$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 58{,}5 \cdot 10^2}{4}} \simeq 54 \text{ (м/с)}.$$

27. Азот массой 2 кг охлаждают при постоянном давлении от 400 до 300 К. Определить изменение внутренней энергии, внешнюю работу и количество выделенной теплоты.

Дано: $m = 2$ кг; $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = 400$ К; $T_2 = 300$ К.

Найти: ΔU, A, Q.

Решение. Изменение внутренней энергии газа (считаем азот идеальным газом) найдем по формуле

$$\Delta U = \frac{mC_V(T_2 - T_1)}{M},$$

где m — масса газа; M — молярная масса; C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме; T_1 — начальная температура; T_2 — конечная температура. Для всех двухатомных газов

$$C_V = \frac{5}{2}R,$$

Тогда

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{mR(T_2 - T_1)}{M}. \quad (1)$$

Количество теплоты, выделяющееся при охлаждении газа при постоянном давлении:

$$Q = \frac{mC_p(T_2 - T_1)}{M}, \quad (2)$$

где C_p — молярная теплоемкость при постоянном давлении; для всех двухатомных газов $C_p = \frac{7}{2}R$. Формулу (2) запишем в виде

$$Q = \frac{7}{2} \cdot \frac{mR(T_2 - T_1)}{M}. \quad (3)$$

Работа сжатия газа при изобарном процессе

$$A = p\Delta V,$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема, которое найдем из уравнения Менделеева—Клапейрона. При изобарном процессе $p = \text{const}$:

$$pV_1 = \frac{mRT_1}{M}; \quad (4)$$

$$pV_2 = \frac{mRT_2}{M}. \quad (5)$$

Почленным вычитанием выражения (4) из (5) находим:

$$p(V_2 - V_1) = \frac{mR(T_2 - T_1)}{M}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{mR(T_2 - T_1)}{M}. \quad (6)$$

Подставляя числовые значения в формулы (1), (3) и (6), получим:

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot (300 - 400)}{28 \cdot 10^{-3}} \simeq -148 \text{ (кДж)};$$

$$Q = \frac{7}{2} \cdot \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot (300 - 400)}{28 \cdot 10^{-3}} \simeq -207 \text{ (кДж)};$$

$$A = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot (300 - 400)}{28 \cdot 10^{-3}} \simeq -59 \text{ (кДж)}.$$

28. Молекулярный пучок кислорода ударяется о неподвижную стенку. После соударения молекулы отражаются от стенки с той же по модулю скоростью. Определить давление пучка на стенку, если скорость молекул 500 м/с и концентрация молекул в пучке $5 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

Дано: $v = 500$ м/с; $n_0 = 5 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

Найти: p.

Решение. Давление определяется по формуле:

$$p = \frac{F}{S}, \quad (1)$$

где F — сила давления, S — площадь.

Силу давления найдем из второго закона Ньютона:

$$Ft = m\Delta v, \quad (2)$$

где m — масса кислорода, ударившегося о стенку за время t, Δv — изменение скорости молекул при ударе.

Массу одной молекулы кислорода найдем из закона Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A},$$

где $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро.

За время t о стенку ударяются молекулы, находящиеся в объеме

$$V = Svt,$$

масса которых

$$m = m_1 n_0 vtS. \tag{3}$$

Изменение скорости при соударении:

$$\Delta v = v - (-v) = 2v. \tag{4}$$

Подставляя выражения (3), (4) в (2), находим:

$$Ft = \frac{Mn_0 vtS2v}{N_A} = \frac{2Mn_0 v^2 tS}{N_A},$$

откуда

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2Mv^2 n_0}{N_A};$$

$$p = \frac{5 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^4}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \simeq 1{,}33 \cdot 10^5 \text{ (Па)}.$$

29. Определить удельные теплоемкости c_p, c_V для смеси 1 кг азота и 1 кг гелия.

Дано: $m_1 = 1$ кг; $M_1 = 28$ кг/кмоль; $i_1 = 5$; $m_2 = 1$ кг; $M_2 = 4$ кг/кмоль; $i_2 = 3$.

Найти: c_p, c_V.

Решение. Удельной теплоемкостью какого-либо газа называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить единице массы тела, чтобы повысить его температуру на 1 градус. При этом величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание газа.

Если нагревание происходит при постоянном объеме, то

$$c_V = \frac{\Delta Q_V}{\Delta T m},$$

где $\Delta Q_V = \Delta U$, т. е. все сообщаемое количество теплоты идет на изменение внутренней энергии системы. Изменение внутренней энергии смеси газа определяется формулой:

$$\Delta U = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{i_1}{2} R\Delta T + \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{i_2}{2} R\Delta T,$$

где i_1 и i_2 — число степеней свободы первого и второго газов.

Окончательно получим

$$c_V = \frac{\left(\frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{i_1}{2} + \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{i_2}{2}\right) R}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Если нагревание происходит при постоянном давлении, то

$$c_p = \frac{\Delta Q_p}{\Delta T m}, \quad (2)$$

где $\Delta Q_p = \Delta U + \Delta A_1$, т. е. сообщаемое газу количество теплоты идет не только на изменение внутренней энергии, но и на работу по расширению газа. Работа при изобарическом расширении для каждого газа равна

$$\Delta A_1 = \frac{m_1}{M_1} R \Delta T; \; \Delta A_2 = \frac{m_2}{M_2} R \Delta T,$$

поэтому

$$\Delta Q_p = \left(\frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{i_1}{2} + \frac{m_2}{M_2} \cdot \frac{i_2}{2}\right) R \Delta T + \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) R \Delta T.$$

Подставляя это значение в уравнение (2), получим:

$$c_p = \frac{\left[\frac{m_1}{M_1}\left(\frac{i_1}{2} + 1\right) + \frac{m_2}{M_2}\left(\frac{i_2}{2} + 1\right)\right] R}{m_1 + m_2}.$$

Произведем вычисления:

$$c_V = \frac{\left(\frac{1}{28} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot 8{,}31 \cdot 10^3}{2} \simeq 1929 \text{ (Дж/(кг} \cdot \text{К))},$$

$$c_p = \frac{\left(\frac{1}{28} \cdot 3{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\right) \cdot 8{,}31 \cdot 10^3}{2} \simeq 3116 \text{ (Дж/(кг} \cdot \text{К))}.$$

30. Аргон при давлении 0,8 атм изменил объем с 1 до 2 л. Как изменяется величина внутренней энергии, если расширение газа производилось при различных процессах: изобарическом, адиабатическом?

Дано: $V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3; $V_2 = 2$ л $= 2 \cdot 10^{-3}$ м^3; $p = 0{,}8$ атм $= 0{,}8 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $M = 40$ кг/кмоль; $i = 3$.

Найти: ΔU.

Решение. Для решения задачи необходимо применить первый закон термодинамики. Согласно этому закону, общее количество теплоты ΔQ, переданное системе, может расходовать-

ся как на увеличение внутренней энергии ΔU, так и на совершение механической работы ΔA:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \tag{1}$$

Величину внутренней энергии ΔU можно определить, зная массу газа m, удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V и изменение температуры ΔT:

$$\Delta U = mc_V\Delta T. \tag{2}$$

Однако удобнее изменение внутренней энергии ΔU определять через молярную теплоемкость C_V, которая может быть выражена через число степеней свободы:

$$c_V = \frac{C_V}{M} = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}. \tag{3}$$

Подставляя величину c_V из формулы (3) в (2), получаем

$$\Delta U = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R\Delta T. \tag{4}$$

При изобарическом расширении газа согласно первому закону термодинамики часть тепла ΔQ идет на изменение внутренней энергии ΔU, которая выражается формулой (4). Определить ΔU для аргона по формуле (4) нельзя, так как масса газа и температура не даны, поэтому необходимо провести преобразование формулы (4).

Используем уравнение Менделеева—Клапейрона для начального V_1 и конечного V_2 состояния газа. Получим:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1 \text{ и } pV_2 = \frac{m}{M} RT_2$$

или

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \tag{5}$$

Подставим выражение (5) в формулу (4)

$$\Delta U = \frac{i}{2} p(V_2 - V_1). \tag{6}$$

Полученное уравнение является расчетным для определения ΔU при изобарическом расширении

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \simeq 121 \text{ (Дж)}. \tag{7}$$

При адиабатическом расширении газа теплообмена с внешней средой не происходит, поэтому $\Delta Q = 0$. Уравнение (1) запишется в виде

$$\Delta U + \Delta A = 0. \tag{8}$$

Это соотношение устанавливает, что работа расширения газа может быть произведена только за счет уменьшения внутренней энергии газа (знак «минус» перед ΔU):

$$\Delta A = -\Delta U. \tag{9}$$

Формула работы для адиабатического процесса имеет вид:

$$\Delta A = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{(\gamma - 1)}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right], \tag{10}$$

где γ — показатель степени адиабаты, который является отношением теплоемкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i + 2}{i}.$$

Определяем изменение внутренней энергии при адиабатическом процессе для аргона, учитывая формулы (9) и (10):

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{(\gamma - 1)}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} - 1\right]. \tag{11}$$

Для определения работы расширения аргона формулу (11) следует преобразовать, учитывая при этом те параметры, которые даны в условии задачи. Уравнение Менделеева—Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$ позволяет перейти к такому выражению для подсчета изменения внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} - 1\right]. \tag{12}$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\Delta U = \frac{0{,}8 \cdot 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{1{,}67 - 1}\left[\left(\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}\right)^{1{,}67 - 1} - 1\right] \simeq -85{,}8 \text{ (Дж)}.$$

31. Газовая смесь состоит из азота массой 2 кг и аргона массой 1 кг. Принимая эти газы за идеальные, определить удельные теплоемкости c_V и c_p газовой смеси.

Дано: $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 1$ кг; $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Найти: c_V, c_p.

Решение. Выразим количество теплоты, необходимое для нагревания смеси азота и аргона на ΔT, двумя способами:

$$Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T; \tag{1}$$

$$Q = (c_{V_1}m_1 + c_{V_2}m_2)\,\Delta T, \tag{2}$$

где c_V — удельная теплоемкость смеси газов при постоянном объеме: c_{V_1} — азота; c_{V_2} — аргона; m_1 — масса азота; m_2 — масса аргона.

Приравняв правые части уравнений (1) и (2) и произведя сокращения, получим:

$$c_V(m_1 + m_2) = c_{V_1}m_1 + c_{V_2}m_2,$$

откуда

$$c_V = \frac{c_{V_1}m_1}{(m_1 + m_2)} + \frac{c_{V_2}m_2}{(m_1 + m_2)}. \tag{3}$$

Аналогичным образом найдем выражение и для c_p:

$$c_p = \frac{c_{p_1}m_1}{(m_1 + m_2)} + \frac{c_{p_2}m_2}{(m_1 + m_2)}. \tag{4}$$

Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами:

$$c_V = \frac{iR}{2M}; \tag{5}$$

$$c_p = \frac{(i+2)R}{2M}. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (3) и (4), получим расчетные формулы:

$$c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M_1} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M_2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \tag{7}$$

$$c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M_1} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M_2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8}$$

Для азота (двухатомный газ) $i = 5$, для аргона (одноатомный газ) $i = 3$.

Подставляя числовые значения в формулы (7) и (8), получим:

$$c_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2}{2+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{8{,}31}{40 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{2+1} \simeq 599 \text{ (Дж/кг} \cdot \text{К)},$$

$$c_p = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8{,}31}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{2}{2+1} + \frac{3+2}{2} \cdot \frac{8{,}31}{40 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{2+1} \simeq$$
$$\simeq 866 \text{ (Дж/кг} \cdot \text{К)}.$$

32. Кислород массой 160 г нагревают при постоянном давлении от 320 до 340 К. Определить количество теплоты, поглощенное газом, изменение внутренней энергии и работу расширения газа.

Дано: $m = 160$ г $= 1{,}6 \cdot 10^{-1}$ кг; $T_1 = 320$ К; $T_2 = 340$ К.

Найти: Q, ΔU, A.

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагревания газа при постоянном давлении, равно:

$$Q = mc_p(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} C_p(T_2 - T_1). \qquad (1)$$

Здесь c_p и $C_p = Mc_p$ — удельная и молярная теплоемкости газа при постоянном давлении; $M = 3{,}2 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса кислорода.

Для всех двухатомных газов

$$C_p = \frac{7}{2} R = 3{,}5 \cdot 8{,}31 \text{ (Дж/(моль} \cdot \text{К))} = 29{,}085 \text{ (Дж/(моль} \cdot \text{К))}.$$

Изменение внутренней энергии газа находим по формуле:

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V(T_2 - T_1), \qquad (2)$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Для всех двухатомных газов

$$C_V = \frac{5}{2} R = 2{,}5 \cdot 8{,}31 \text{ (Дж/(моль} \cdot \text{К))} = 20{,}775 \text{ (Дж/(моль} \cdot \text{К))}.$$

Работа расширения газа при изобарном процессе $A = p\Delta V$, где $\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема газа, которое можно найти из уравнения Менделеева—Клапейрона. При изобарном процессе

$$pV_1 = \frac{mRT_1}{M}, \qquad (3)$$

$$pV_2 = \frac{mRT_2}{M}. \qquad (4)$$

Почленным вычитанием выражения (4) из (3) находим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

следовательно,

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения в формулы (1), (2) и (5), получаем:

$$Q = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-1}}{3{,}2 \cdot 10^{-2}} \cdot 29{,}085(340 - 320) = 2908 \text{ (Дж)};$$

$$\Delta U = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-1}}{3{,}2 \cdot 10^{-2}} \cdot 20{,}775(340 - 320) = 2077{,}5 \text{ (Дж)};$$

$$A = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-1}}{3{,}2 \cdot 10^{-2}} \cdot 8{,}31(340 - 320) = 831 \text{ (Дж)}.$$

33. В цилиндре под поршнем находится водород, который имеет массу 0,02 кг и начальную температуру 27 °С. Водород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в 5 раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в 5 раз. Найти температуру в конце адиабатического расширения и работу, совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Дано: $m = 0{,}02$ кг; $T_1 = 27$ °С $= 300$ К; $M = 2$ кг/кмоль; $\frac{V_2}{V_1} = 5$; $i = 5$.

Найти: T_2, A.

Решение. При адиабатном процессе температура и объем газа связаны соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Для водорода $\gamma = 1{,}4$.

Отсюда выражение для конечной температуры T_2 будет:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = 300\left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}4} \simeq 157 \text{ (К)}.$$

Работу A_1 газа при адиабатическом расширении можно определить по формуле

$$A = \frac{m}{M} C_V(T_1 - T_2) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R(T_1 - T_2),$$

$$A_1 = \frac{0{,}02 \cdot 5 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3}{2 \cdot 2}(300 - 157) \simeq 2{,}97 \cdot 10^4 \text{ (Дж)}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде:

$$A_2 = RT_2\frac{m}{M}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Подставляя известные числовые значения величин, входящих в правую часть равенства, и выполняя арифметические действия, находим:

$$A_2 = 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 157 \cdot \frac{0{,}02}{2} \ln\frac{1}{5} \simeq -2{,}10 \cdot 10^4 \text{ (Дж)}.$$

Знак «минус» показывает, что при сжатии газа работа совершается над газом внешними силами. Полная работа, совершенная газом при описанных процессах, равна:

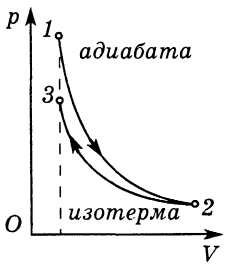


Рис. 11

$$A = 2{,}97 \cdot 10^4 - 2{,}10 \cdot 10^4 = 8{,}7 \cdot 10^3 \text{ (Дж)}.$$

График процесса приведен на рис. 11.

34. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1$ м^3 и находится под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м^3, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0{,}5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и количество теплоты Q, переданное газу. Построить график процесса.

Дано: $m = 2$ кг; $M = 32$ кг/кмоль; $V_1 = 1$ м^3; $p_1 = p_2 = 2 \cdot 10^5$ Па; $V_2 = 3$ м^3; $p_3 = 5 \cdot 10^5$ Па; $R = 8{,}31 \times \times 10^3$ Дж/(кмоль · К).

Найти: ΔU, A, Q.

Решение. Изменение внутренней энергии газа выражается формулой

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{R}{M} m\Delta T, \qquad (1)$$

где i — число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода $i = 5$); M — молярная масса; R — молярная газовая постоянная.

Начальную и конечную температуру найдем, используя уравнение Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \qquad (2)$$

Решая его относительно T, получим

$$T = \frac{pVM}{mR}. \qquad (3)$$

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32}{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} \simeq 385 \text{ (К)}; \; T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32}{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} \simeq 1155 \text{ (К)};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32}{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3} = 2888 \text{ (К)}.$$

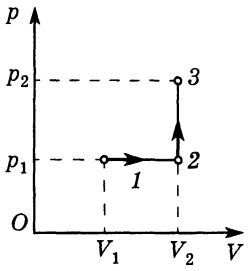


Рис. 12

Подставляя в выражение (1) числовые значения входящих в него величин, находим

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 10^3}{32} \cdot 2(2888 - 385) \simeq$$
$$\simeq 3{,}25 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A = R\frac{m}{M}\Delta T.$$

Подставив числовые значения, получим

$$A = 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{32} \cdot (1155 - 385) \simeq 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю, т. е. $A_2 = 0$. Следовательно, полная работа, совершенная газом, равна

$$A = A_1 + A_2 = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q, переданное газу, равно сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы A:

$$Q = \Delta U + A,$$

следовательно,

$$Q = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ (Дж)} + 3{,}25 \cdot 10^6 \text{ (Дж)} = 3{,}65 \text{ (МДж)}.$$

График процесса приведен на рис. 12.

35. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. Температура нагревателя 400 К, температура холодильника 260 К. Найти КПД машины, количество теплоты, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Дано: $A = 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж; $T_1 = 400$ К; $T_2 = 260$ К.

Найти: η, Q_1, Q_2.

Решение. КПД цикла Карно определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

С другой стороны, термический КПД выражается формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \qquad (2)$$

где A — работа, совершенная рабочим телом тепловой машины; Q_1 — теплота, полученная от нагревателя.

Из (1) и (2) имеем

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{AT_1}{T_1 - T_2}. \qquad (3)$$

Работа, совершенная рабочим телом машины, определяется разностью полученной от нагревателя теплоты Q_1 и отданной холодильнику теплоты Q_2:

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Отсюда

$$Q_2 = Q_1 - A,$$

или с учетом (3)

$$Q_2 = \frac{AT_1}{T_1 - T_2} - A = \frac{AT_2}{T_1 - T_2}. \qquad (4)$$

Подставляя числовые значения в (1), (3) и (4), находим:

$$\eta = \frac{400 - 260}{400} = 0{,}35 = 35\%;$$

$$Q_1 = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 400}{400 - 260} \simeq 429 \text{ (кДж)};$$

$$Q_2 = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 260}{400 - 260} \simeq 279 \text{ (кДж)}.$$

36. Температура нагревателя тепловой машины 500 К. Температура холодильника 400 К. Определить КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полезную мощность машины, если нагреватель ежесекундно передает ей 1675 Дж теплоты.

Дано: $T = 500$ К; $T_0 = 400$ К; $Q = 1675$ Дж.

Найти: η, N.

Решение. КПД машины определяется по формуле

$$\eta = \frac{T - T_0}{T} \qquad (1)$$

или

$$\eta = \frac{A}{Q}. \qquad (2)$$

Из выражений (2) и (1) находим

$$A = \eta Q = Q\frac{T - T_0}{T}.$$

Произведем вычисления:

$$\eta = \frac{500 - 400}{500} = 0{,}2;$$

$$A = 0{,}2 \cdot 1675 = 335 \text{ (Дж)}.$$

Эта работа совершается за 1 с, следовательно, полезная мощность машины:

$$N = \frac{A}{t} = 335 \text{ (Дж/с)} = 335 \text{ (Вт)}.$$

37. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя 227 °С. Определить термический КПД цикла и температуру охладителя тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу 350 Дж.

Дано: $T_1 = 227$ °С $= 500$ К; $Q_1 = 10^3$ Дж; $A = 350$ Дж.

Найти: η, T_2.

Решение. Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от нагревателя, превращается в механическую работу. Термический КПД выражается формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 — теплота, полученная от нагревателя, A — работа, совершенная рабочим телом тепловой машины.

Подставив числовые значения A и Q_1, получим:

$$\eta = \frac{350}{1000} = 0{,}35 = 35\%.$$

Зная КПД цикла, можно по формуле

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

определить температуру охладителя T_2:

$$T_2 = T_1(1 - \eta).$$

Подставив сюда найденное значение КПД ($\eta = 0{,}35$) и температуру нагревателя ($T_1 = 500$ К), получим:

$$T_2 = 500(1 - 0{,}35) = 325 \text{ (К)}$$

или

$$t_2 = (325 - 273) = 52 \text{ (°С)}.$$

38. Кислород массой 1 кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатическом расширении совершается работа 3000 Дж. Определить работу, совершенную за цикл.

Дано: $i = 5$; $V_2 = 2V_1$; $A_{2-3} = 3000$ Дж.

Найти: A.

Решение. Идеальный цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис. 13).

На рис. 13 участок *1—2* соответствует изотермическому расширению газа ($T_1 = T_2$), участок *2—3* — адиабатическому расширению газа, участок *3—4* — изотермическому сжатию ($T_3 = T_4$) и участок *4—1* — адиабатическому сжатию.

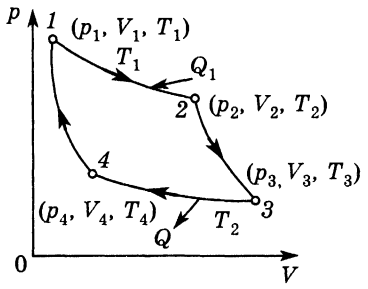


Рис. 13

При изотермическом расширении внутренняя энергия идеального газа остается постоянной, следовательно, все подводимое тепло Q_1 идет на работу по расширению газа на участке *1—2*, т. е.

$$Q_1 = A_{1-2} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

При изотермическом сжатии на участке *3—4* тепло отдается холодильнику (Q_2), и это количество теплоты определяется работой, затраченной на сжатие газа:

$$Q_2 = A_{3-4} = \frac{m}{M} RT_3 \ln \frac{V_4}{V_3}. \qquad (2)$$

Состояния *2* и *3* лежат на одной адиабате, поэтому можно записать:

$$T_2 V_2^{\gamma - 1} = T_3 V_3^{\gamma - 1}. \qquad (3)$$

Для состояний *4* и *1*, которые отвечают одной адиабате, имеем:

$$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_4 V_4^{\gamma - 1}. \qquad (4)$$

Поделив выражение (3) на (4), получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}, \qquad (5)$$

так как $T_1 = T_2$ и $T_3 = T_4$.

Работа при адиабатическом расширении на участке *2—3* равна:

$$A_{2-3} = -\Delta U_{2-3} = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R(T_2 - T_3). \qquad (6)$$

Работа при адиабатическом сжатии на участке *4—1* равна:

$$A_{4-1} = -\Delta U_{4-1} = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R(T_4 - T_1) =$$

$$= -\frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R(T_1 - T_4).$$

Так как $T_1 = T_2$, а $T_3 = T_4$, то $A_{2-3} = -A_{4-1}$, т. е. полная работа по адиабатическому сжатию и расширению равна нулю.

Следовательно, работа цикла:

$$A = A_{1-2} - A_{3-4}.$$

Из уравнений (1), (2) и (5) получим:

$$A = \frac{m}{M} R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (7)$$

Из уравнения (6) выразим разность температур $T_2 - T_3$, равную $T_1 - T_3$, и подставим в уравнение (7):

$$A = \frac{2}{i} A_{2-3} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{2}{5} \cdot 3000 \cdot 0{,}693 = 831{,}6 \text{ (Дж)}.$$

39. Тепловая машина работает по циклу Карно. При изотермическом расширении двухатомного газа его объем увеличивается в 3 раза, а при последующем адиабатическом расширении — в 5 раз. Определить КПД цикла. Какую работу совершает 1 кмоль газа за один цикл, если температура нагревателя 300 К? Какое количество теплоты получит от холодильника машина, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении, и какое количество теплоты будет передано нагревателю?

Дано: $V_2/V_1 = k = 3$; $V_3/V_2 = n = 5$; $\nu = 1$ кмоль $= 10^3$ моль; $T_1 = 300$ К.

Найти: η, A, Q_2, Q_1.

Решение. КПД цикла Карно определяется формулой

$$\eta = \frac{T_1 - T_3}{T_1}, \qquad (1)$$

где T_1 — температура нагревателя; T_3 — холодильника.

При адиабатическом процессе *2—3* (рис. 14):

$$T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}, \qquad (2)$$

где γ — показатель степени адиабаты (для двухатомного газа $\gamma = 1{,}4$). Из равенства (2) находим

$$T_3 = T_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = T_2n^{1-\gamma}.$$

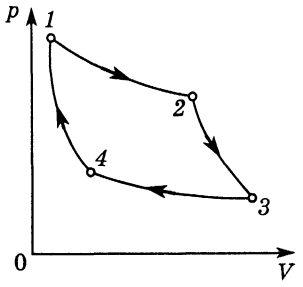


Рис. 14

Так как $T_1 = T_2$, то из равенства (1) получаем

$$\eta = \frac{T_2 - T_2n^{1-\gamma}}{T_2} = 1 - n^{1-\gamma},$$

где $n^{1-\gamma} = 5^{1-1{,}4} = 0{,}525$.

Следовательно,

$$\eta = 1 - 0{,}525 = 0{,}475;\ \eta = 47{,}5\%.$$

Работа в цикле Карно определяется разностью количества теплоты Q_1, полученного в процессе *1—2*, и Q_2, отданного в процессе *3—4*:

$$A = Q_1 - Q_2. \qquad (3)$$

При изотермическом процессе

$$Q_1 = \nu RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT_1\ln k,\ Q_2 = \nu RT_3\ln\frac{V_4}{V_3} = -\nu RT_3\ln k, \qquad (4)$$

так как $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$. Знак «минус» показывает, что теплота отдается холодильнику.

Следовательно,

$$A = \nu R\ln k(T_1 - T_3) = \nu R\ln k\Delta T, \qquad (5)$$

где $\Delta T = T_1 - T_3 = T_1 - T_1n^{1-\gamma} = T_1(1 - n^{1-\gamma}) = T_1\eta$; $\Delta T = 300 \times$ $\times\ 0{,}475 = 142{,}5$ (К); тогда $T_3 = 157{,}5$ К.

Подставим числовые значения в равенство (5):

$$A = 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 1{,}1 \cdot 142{,}5 = 1{,}3\ (\text{МДж}).$$

При обратном цикле Карно газ расширяется по адиабате *1—4*, затем по изотерме *4—3*, получая при этом от холодильника количество теплоты Q_2; далее газ сжимается по адиабате

3—2, затем по изотерме *2—1*, отдавая при этом количество теплоты Q_1. По формуле (4) находим:

$$Q_1 = 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 1{,}1 \cdot 300 \simeq 2{,}74 \text{ (МДж)};$$

$$Q_2 = 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 1{,}1 \cdot 156 \simeq 1{,}44 \text{ (МДж)}.$$

40. При давлении 10^5 Па 0,2 моля двухатомного газа занимает объем 10 л. Газ изобарно сжимают до объема 4 л, затем сжимают адиабатно, после чего газ изотермически расширяется до начального объема и давления. Построить график процесса в координатах p, V. Найти: работу, совершенную газом за один цикл; температуру, давление и объем в характерных точках процесса; количество теплоты, полученное газом от нагревателя и отданное газом холодильнику, а также термический КПД цикла.

Дано: $p_1 = 10$ Па; $\nu = 0{,}2$ моль; $V_1 = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3; $V_2 = 4$ л $= 4 \cdot 10^{-3}$ м^3; $T_3 = T_1$; $p_1 = p_2$; $i = 5$.

Найти: A, T_1, T_2, p_3, V_3, Q_1, Q_2, η.

Решение. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $pV_1 = \nu RT_1$ находим $T_1 = \dfrac{p_1 V_1}{\nu R}$:

$$T_1 = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{0{,}2 \cdot 8{,}31} \simeq 602 \text{ (К)}.$$

Из уравнения изобарного процесса $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$ находим

$$T_2 = \frac{T_1 V_2}{V_1}: \; T_2 = \frac{602 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} \simeq 241 \text{ (К)}.$$

Найдем координаты точки пересечения адиабаты и изотермы. Из уравнения адиабатного процесса $T_2 V_2^{\gamma - 1} = T_1 V_3^{\gamma - 1}$ ($\gamma = 1{,}4$ — для двухатомного газа), откуда

$$V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma - 1)},$$

$$V_3 = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{241}{602}\right)^{1/(1{,}4 - 1)} \simeq 4{,}05 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Из уравнения изотермического процесса $p_3 V_3 = p_1 V_1$,

$$p_3 = \frac{p_1 V_1}{V_3},$$

$$p_3 = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{4{,}05 \cdot 10^{-4}} \simeq 2{,}47 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

Зная координаты точек пересечения изотермы и адиабаты между собой и с изобарой, строим график процесса (рис. 15).

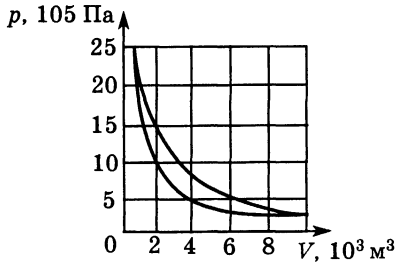


Рис. 15

Количество теплоты, полученное газом от нагревателя, определим по первому закону термодинамики: $dQ = \nu C_V dT + pdV$. При изотермическом процессе $dU = \nu C_V dT = 0$ и $dQ = pdV$ (работе расширения); следовательно,

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right), \; Q_1 = 0{,}2 \cdot 8{,}31 \cdot 602 \cdot 3{,}2 \simeq 3{,}2 \text{ (кДж)}.$$

Количество теплоты, отданное газом холодильнику при изобарном процессе, равно:

$$Q_2 = \nu C_p (T_1 - T_2).$$

Для двухатомного газа $C_p = \frac{7}{2} R$. Тогда

$$Q_2 = 0{,}2 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8{,}31 \cdot (602 - 241) = 2{,}1 \text{ (кДж)}.$$

Работа, совершенная газом,

$$A = Q_1 - Q_2, \; A = 3{,}2 - 2{,}1 = 1{,}1 \text{ (кДж)}.$$

Находим КПД цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \; \eta = \frac{1{,}1}{3{,}2} = 0{,}344 = 34{,}4\%.$$

41. В результате изотермического расширения объем 8 г кислорода увеличился в 2 раза. Определить изменение энтропии газа.

Дано: $m = 8$ г $= 8 \cdot 10^{-3}$ кг; $M = 32$ кг/кмоль; $V_2 = 2V_1$.

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии системы определяется по формуле

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad (1)$$

где dQ — количество тепла, сообщенное газу, T — абсолютная температура, S_1 и S_2 — значения энтропии в начальном и конечном состояниях системы.

При изотермическом расширении все подводимое количество теплоты идет на работу по расширению, т. е. $dQ = dA = pdV$.

Из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V},$$

поэтому

$$dQ = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{V} dV. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим:

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} R \cdot \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Произведем вычисления:

$$\Delta S = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{32} \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 0{,}693 \simeq 1{,}44 \text{ (Дж/град)}.$$

42. Горячая вода некоторой массы отдает теплоту холодной воде такой же массы, и температуры их становятся одинаковыми. Показать, что энтропия при этом увеличивается.

Решение. Пусть температура горячей воды T_1, холодной — T_2, а температура смеси Θ. Определим температуру смеси, исходя из уравнения теплового баланса:

$$mc(T_1 - \Theta) = mc(\Theta - T_2), \text{ или } T_1 - \Theta = \Theta - T_2,$$

откуда

$$\Theta = \frac{T_1 + T_2}{2}. \qquad (1)$$

Изменение энтропии, происходящее при охлаждении горячей воды:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{\Theta} \frac{cm dT}{T} = cm \ln \frac{\Theta}{T_1}.$$

Изменение энтропии, происходящее при нагревании холодной воды:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{\Theta} \frac{cm dT}{T} = cm \ln \frac{\Theta}{T_2}.$$

Изменение энтропии системы равно

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = cm \ln \frac{\Theta}{T_1} + cm \ln \frac{\Theta}{T_2} = cm \ln \frac{\Theta^2}{T_1 \cdot T_2},$$

или с учетом соотношения (1) имеем:

$$\Delta S = cm \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2}.$$

Так как $T_1 > T_2 > 273$ К, то $\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 1$ и $\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 0$.

Поэтому $\Delta S > 0$, т. е. энтропия возросла.

43. Как изменится энтропия 2 г водорода, занимающего объем 40 л при температуре 270 К, если давление увеличить вдвое при постоянной температуре и затем повысить температуру до 320 К?

Дано: $m = 2$ г $= 2 \cdot 10^{-3}$ кг; $V_1 = 40$ л $= 4 \cdot 10^{-2}$ м^3; $M = 2 \times$ $\times 10^{-3}$ кг/моль; $T_1 = 270$ К; $T_2 = 320$ К; $p_2 = 2p_1$.

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии определяется формулой

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad (1)$$

где dQ — изменение количества теплоты; T — термодинамическая температура.

Изменение количества теплоты находим из первого закона термодинамики для идеального газа:

$$dQ = \frac{mC_V dT}{M} + pdV, \qquad (2)$$

где m — масса газа; M — молярная масса; C_V — молярная изохорная теплоемкость; dT — изменение температуры газа; p — давление газа; dV — изменение объема; pdV — работа расширения газа.

Величину p найдем из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p = \frac{mRT}{MV}. \qquad (3)$$

Для двухатомного газа

$$C_V = \frac{5}{2}R, \qquad (4)$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — молярная газовая постоянная.

Подставляя (3) и (4) в (2), находим:

$$dQ = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{M} RdT + \frac{m}{M} RT\frac{dV}{V}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (1), получаем:

$$\Delta S = \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{M} R\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_1}{T_1} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (6)$$

Для изотермического процесса

$$p_1V_1 = p_2V_2;\ \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\Delta S = \frac{m}{M} R\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} - \ln\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Произведем вычисления:

$$\Delta S = \frac{2\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31\left(\frac{5}{2}\ln\frac{320}{270} - \ln 2\right) \simeq -2{,}28\ (\text{Дж/К}).$$

44. При температуре 250 К и давлении $1{,}013\cdot 10^5$ Па двухатомный газ занимает объем 80 л. Как изменится энтропия газа, если давление увеличить вдвое, а температуру повысить до 300 К?

Дано: $p_1 = 1{,}013\cdot 10^5$ Па; $T_1 = 250$ К; $V_1 = 80$ л $= 8\cdot 10^{-2}$ м^3; $p_2 = 2p_1$; $T_2 = 300$ К.

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии определяется формулой

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad (1)$$

Изменение количества теплоты находим из первого закона термодинамики:

$$dQ = \frac{m}{M} C_V dT + pdV. \qquad (2)$$

Здесь m — масса газа; M — молярная масса; C_V — молярная изохорическая теплоемкость (для двухатомных газов $C_V = \frac{5}{2}R$, где R — молярная газовая постоянная); dV — изменение объема газа при изменении температуры T на dT; pdV — работа при расширении газа.

Величины $\frac{m}{M}$ и p найдем из уравнения Менделеева—Клапейрона и объединенного газового закона:

$$\frac{m}{M} = \frac{p_1V_1}{T_1R};\ p = \frac{m}{M}\cdot\frac{RT}{V} = \frac{p_1V_1}{T_1}\cdot\frac{T}{V}. \qquad (3)$$

Подставляя уравнение (3) в (2), находим:

$$dQ = \frac{p_1V_1}{T_1}\cdot\frac{5R}{2}dT + \frac{p_1V_1}{T_1}\cdot\frac{T}{V}dV = \frac{p_1V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}dT + T\frac{dV}{V}\right). \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в (1), находим

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}\right) = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{V_2}{V_1}\right),$$

но

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1},$$

тогда

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}\right) = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{5}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{T_2}{T_1} - \ln\frac{p_2}{p_1}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{7}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} - \ln\frac{p_2}{p_1}\right);$$

$$\Delta S = 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-2}}{250}(3{,}5 \cdot 0{,}182 - 0{,}693) \simeq -1{,}82 \text{ (Дж/К)}.$$

45. Лед массой 2 кг, находящийся при температуре −13 °С, нагрели до 0 °С и расплавили. Определить изменение энтропии.

Дано: $m = 2$ кг; $t_1 = -13$ °С; $t_2 = 0$ °С; $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

где dQ — количество теплоты, сообщенное телу; T — термодинамическая температура тела; S_1 и S_2 — соответственно значения энтропии в начальном и конечном состояниях системы. Общее изменение энтропии равно:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i,$$

где ΔS_i — изменение энтропии, происходящее на отдельных этапах процесса.

Разделим этот процесс на два этапа. На первом — происходит нагревание льда от начальной температуры $T_1 = 260$ К до температуры плавления льда $T_2 = 273$ К и

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Так как

$$dQ_1 = mc_1 dT,$$

то

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

На втором этапе имеет место плавление льда. В этом случае

$$\Delta Q_2 = m\lambda.$$

Тогда $$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2}.$$

Общее изменение энтропии:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m\left(c_1 \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2}\right).$$

Проведем вычисления в единицах СИ:

$$\Delta S = 2\left(2{,}1 \cdot 10^3 \ln\frac{273}{260} + \frac{3{,}35 \cdot 10^5}{273}\right) \simeq 2{,}66 \cdot 10^3 \text{ (Дж/К)}.$$

46. Лед масой 2 кг, находящийся при температуре −10 °С, нагрели и превратили в пар. Определить изменение энтропии.

Дано: $m = 2$ кг; $T_1 = 263$ К; $T_2 = 273$ К; $T_3 = 373$ К; $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $c_2 = 4{,}19 \times$ $\times 10^3$ Дж/(кг · К); $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Найти: ΔS.

Решение. Изменение энтропии определяется по формуле

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Общее изменение энтропии равно сумме $\sum \Delta S_i$, где ΔS_i — изменения энтропии, происходящие на отдельных этапах процесса:

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

1. Изменение энтропии ΔS_1 происходит при нагревании льда от начальной температуры $T_1 = 263$ К до температуры плавления $T_2 = 273$ К:

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_1}{T}, \text{ так как } dQ_1 = mc_1 dT, \text{ то}$$

$$\Delta S_1 = mc_1 \ln\frac{T_2}{T_1},$$

где m — масса льда; c_1 — удельная теплоемкость льда.

2. Изменение энтропии ΔS_2 происходит при плавлении льда. В этом случае $dQ_2 = m\lambda$.

Тогда $$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2},$$

где T_2 — температура плавления льда; λ — удельная теплота плавления.

3. Изменение энтропии ΔS_3 происходит при нагревании воды от температуры T_2 до температуры кипения $T_3 = 373$ К. Величина ΔS_3 вычисляется аналогично ΔS_1:

$$\Delta S_3 = mc_2 \ln \frac{T_3}{T_2},$$

где c_2 — удельная теплоемкость воды.

4. Изменение энтропии ΔS_4 происходит при испарении воды; так как $\Delta Q = mr$, то

$$\Delta S_4 = \frac{mr}{T_3},$$

где r — удельная теплота парообразования.

Общее изменение энтропии

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = m\left(c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{r}{T_3}\right) =$$

$$= 2\left(2{,}1 \cdot 10^3 \ln \frac{273}{263} + \frac{3{,}35 \cdot 10^5}{273} + 4{,}19 \cdot 10^3 \ln \frac{373}{273} + \right.$$

$$\left. + \frac{2{,}26 \cdot 10^6}{373}\right) \simeq 1{,}73 \cdot 10^4 \text{ (Дж/К)}.$$

47. Струя водяного пара при температуре 100 °С, направленная на глыбу льда, масса которой 5 кг и температура 0 °С, растопила ее и нагрела получившуюся воду до температуры 50 °С. Найти массу израсходованного пара и изменение энтропии при описанных процессах.

Дано: $m_1 = 5$ кг; $T_1 = 0$ °С $= 273$ К; $T_2 = 100$ °С $= 373$ К; $\theta = 50$ °С $= 323$ К; $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг; $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг; $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

Найти: m_2, ΔS.

Решение. Количество теплоты, нужное для плавления льда и для нагревания полученной холодной воды, равно количеству теплоты, выделившемуся при превращении пара в воду той же температуры и последующем охлаждении полученной горячей воды. Составим уравнение теплового баланса:

$$m_1\lambda + cm_1(\theta - t_1) = m_2 r + cm_2(t_2 - \theta),$$

где m_1 — масса льда; m_2 — масса пара; λ — удельная теплота плавления льда; r — удельная теплота парообразования воды;

c — удельная теплоемкость воды; θ — температура смеси; t_1 — температура плавления льда; t_2 — температура кипения воды. Решая уравнение относительно m_2, получим:

$$m_2 = m_1 \frac{\lambda + c(\theta - t_1)}{r + c(t_2 - \theta)} = 5 \frac{3{,}35 \cdot 10^5 + 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot (50 - 0)}{2{,}26 \cdot 10^6 + 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot (100 - 50)} \simeq$$
$$\simeq 1{,}1 \text{ (кг)}.$$

Изменение энтропии ΔS равно сумме изменений энтропии при таянии льда (ΔS_1), при нагревании получившейся холодной воды (ΔS_2), при превращении пара в воду той же температуры (ΔS_3) и, наконец, при охлаждении полученной из пара горячей воды до окончательной температуры смеси (ΔS_4).

Изменение энтропии при переходе системы из состояния *1* в состояние *2* выражается следующей формулой:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Найдем изменение энтропии при каждом из описанных процессов.

1. При таянии льда температура T сохраняет постоянное значение, равное 273 К. Вынося постоянную температуру за знак интеграла, получаем:

$$\Delta S_1 = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{\Delta Q}{T},$$

где ΔQ — количество теплоты, необходимое для таяния льда.

$$\Delta Q = \lambda m_1 = 3{,}35 \cdot 10^5 \cdot 5 = 1{,}675 \cdot 10^6 \text{ (Дж)}.$$

Следовательно,

$$\Delta S_1 = \frac{1{,}675 \cdot 10^6}{273} \simeq 6{,}14 \cdot 10^3 \text{ (Дж/К)}.$$

2. При нагревании воды на dT требуется количество теплоты, равное:

$$dQ = cm_1 dT.$$

Следовательно, изменение энтропии при нагревании воды выразится так:

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{cm_1 dT}{T} = cm_1 \int_1^2 \frac{dT}{T} = cm_1 \ln \frac{T_2}{T_1};$$

$$\Delta S_2 = 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot \ln \frac{323}{273} \simeq 3{,}52 \cdot 10^3 \text{ (Дж/К)}.$$

3. При превращении пара в воду той же температуры изменение энтропии может быть найдено так же, как и в случае таяния льда, т. е.

$$\Delta S_3 = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{rm_2}{T_2};\ \Delta S_3 = -\frac{2{,}26\cdot 10^6\cdot 1{,}1}{373} = \\ = -6{,}66\cdot 10^3\ (\text{Дж/К}).$$

Изменению энтропии приписывается знак «минус», так как в этом случае энергия выделяется.

4. Изменение энтропии при охлаждении полученной горячей воды получим путем рассуждений, аналогичных случаю нагревания воды:

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{cm_2 dT}{T} = cm_2\int_1^2 \frac{dT}{T} = cm_2 \ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\Delta S_4 = 4{,}19\cdot 10^3\cdot 1{,}1\ln\frac{323}{373} \simeq -663\ (\text{Дж/К}).$$

Полное изменение энтропии

$$\Delta S = (6{,}14\cdot 10^3 + 3{,}52\cdot 10^3 - 6{,}66\cdot 10^3 - 0{,}663\cdot 10^3) = \\ = 2{,}337\cdot 10^3\ (\text{Дж/К}).$$

3. Реальные газы и жидкости

48. В сосуде емкостью 10 л находится 360 г водяного пара при температуре 470 К. Вычислить давление пара на стенки сосуда. Какую часть объема V составляет собственный объем V' молекул пара? Какую часть давления p составляет внутреннее давление p'?

Дано: $V = 10$ л $= 0{,}01$ м^3; $m = 360$ г $= 0{,}360$ кг; $T = 470$ К.

Найти: p, V'/V, p'/p.

Решение. По уравнению Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2}\cdot\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT, \qquad (1)$$

где $\frac{m}{M} = \frac{0{,}360}{18\cdot 10^{-3}} = 0{,}02\cdot 10^3$ (моль) — число молей газа; a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса (для водяного пара $a = 55\cdot 10^{-4}$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 0{,}3\cdot 10^{-4}$ Н $\cdot$ м^3/моль); $R = 8{,}31$ Дж/(Моль $\cdot$ К) — молярная газовая постоянная.

Собственный объем V' молекул связан с поправкой b равенством

$$\frac{mb}{M} = 4V'.$$

Тогда

$$\frac{V'}{V} = \frac{mb}{4MV};$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{0{,}02 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0{,}01} = 0{,}015;\ \frac{V'}{V} = 1{,}5\%.$$

Внутреннее давление определяется равенством

$$p' = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2};$$

$$p' = (0{,}02 \cdot 10^3)^2 \frac{55 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ (Па)}.$$

Давление p находим из уравнения (1):

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{\left(V - \frac{m}{M}b\right)} - \left(\frac{m}{M}\right)^2 \cdot \frac{a}{V^2};$$

$$p = 0{,}02 \cdot 10^3 \frac{8{,}31 \cdot 470}{(0{,}01 - 0{,}02 \cdot 10^3 \cdot 0{,}03 \cdot 10^{-3})} - 2{,}2 \cdot 10^4 = 8{,}29 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

Тогда

$$\frac{p'}{p} = \frac{2{,}2 \cdot 10^4}{8{,}29 \cdot 10^6} \simeq 0{,}003;\ \frac{p'}{p} = 0{,}3\%.$$

49. Даны постоянные a и b, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса. Определить значения критической температуры и критического давления аргона.

Дано: $a = 1{,}36 \cdot 10^5$ Н $\cdot$ м^4/кмоль^2; $b = 0{,}0322$ м^3/кмоль; $\nu = 1$.

Найти: $T_к$, $p_к$.

Решение. Уравнение состояния реальных газов Ван-дер-Ваальса для 1 кмоля имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) можно получить выражение для критических величин $T_к$ и $p_к$:

$$T_к = \frac{8a}{27bR};$$

$$p_к = \frac{a}{27b^2}.$$

Определяем $T_к$ и $p_к$:

$$T_к = \frac{8 \cdot 1{,}36 \cdot 10^5}{27 \cdot 0{,}0322 \cdot 8{,}32 \cdot 10^3} \simeq 151 \text{ (К)};$$

$$p_к = \frac{(1, 36) \cdot 10^5}{27 \cdot (0{,}0322)^2} \simeq 4{,}86 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

50. Углекислый газ массой 88 г находится в сосуде емкостью 10 л. Определить внутреннее давление газа и собственный объем молекул.

Дано: $m = 88$ г $= 8{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг; $V = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3; $M = 4{,}4 \cdot 10^{-2}$ кг/моль; $a = 0{,}361$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 4{,}28 \times$ $\times 10^{-5}$ м^3/моль.

Найти: p', V'.

Решение. По уравнению Ван-дер-Ваальса выражение добавочного давления p' имеет вид

$$p' = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2},$$

где a — постоянная Ван-дер-Ваальса, V — объем.

$$p' = \left(\frac{8{,}8 \cdot 10^{-2}}{4{,}4 \cdot 10^{-2}}\right)^2 \cdot \frac{0{,}361}{10^{-4}} \simeq 14{,}4 \text{ (кПа)}.$$

Постоянная Ван-дер-Ваальса b учитывает поправку на собственный объем молекул V', и, как следует из уравнения Ван-дер-Ваальса, произведение $\frac{m}{M} b$ равно учетверенному объему молекул $\frac{m}{M} b = 4V'$, откуда

$$V' = \frac{m}{M} \cdot \frac{b}{4} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{-2}}{4{,}4 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{4{,}28 \cdot 10^{-5}}{4} = 0{,}021 \text{ (л)}.$$

51. В сосуде емкостью 25 л при температуре 300 К находится 40 моль кислорода. Определить давление газа, считая его идеальным; реальным.

Дано: $\nu = 40$; $T = 300$ К; $V = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^3; $a = 0{,}136$ Н $\times$ $\times$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Найти: p_1, p_2.

Решение. Давление идеального газа определяем из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_1 = \frac{\nu RT}{V}; \; p_1 = \frac{40 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{2{,}5 \cdot 10^{-2}} \simeq 4 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

Давление газа, считая его реальным, определим из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

где a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса.

Преобразуя это выражение, получим:

$$p_2 + \frac{\nu^2 a}{V^2} = \frac{\nu RT}{V - \nu b},$$

откуда

$$p_2 = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2};$$

$$p_2 = \frac{4 \cdot 10^1 \cdot 8{,}31 \cdot 3 \cdot 10^2}{2{,}5 \cdot 10^{-2} - 40 \cdot 3{,}17 \cdot 10^{-5}} - \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 0{,}136}{2{,}5^2 \cdot 10^{-4}} \simeq 3{,}85 \cdot 10^6 \text{ (Па)}.$$

52. В сосуде под давлением 8 МПа содержится кислород, плотность которого 100 кг/м^3. Считая газ реальным, определить его температуру и сравнить ее с температурой идеального газа при тех же условиях.

Дано: $p = 8 \cdot 10^6$ Па; $\rho = 100$ кг/м^3; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $a = 0{,}136$ Н $\cdot$ м^4/моль^2; $b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Найти: T.

Решение. Температуру идеального газа найдем из уравнения состояния идеального газа — уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT;\ \rho = \frac{m}{V};\ pM = \rho RT,$$

откуда

$$T_1 = \frac{pM}{\rho R};$$

$$T_1 = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{10^2 \cdot 8{,}31} \simeq 308 \text{ (К)}.$$

Уравнение состояния реального газа — уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества газа имеет вид:

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{a}{V^2}\right)\left(\frac{VM}{m} - b\right) = RT.$$

Преобразуем уравнение с учетом того, что $\rho = \frac{m}{V}$.

$$\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)\left(\frac{M}{\rho} - b\right) = RT.$$

Отсюда

$$T_2 = \frac{\left(p + \frac{\rho^2 a}{M^2}\right)\left(\frac{M}{\rho} - b\right)}{R};$$

$$T_2 = \frac{\left(8 \cdot 10^6 + \frac{10^4 \cdot 0{,}136}{32^2 \cdot 10^{-6}}\right)\left(\frac{32 \cdot 10^{-3}}{10^2} - 3{,}17 \cdot 10^{-5}\right)}{8{,}31} \simeq 324 \text{ (К)}.$$

53. Как изменится высота поднятия спирта между двумя пластинками, погруженными в спирт, если расстояние между ними уменьшить с 1 мм до 0,5 мм? Смачивание пластинок считать полным.

Дано: $\sigma = 0{,}022$ Н/м; $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $r_1 = 1$ мм $= 10^{-3}$ м; $r_2 = 0{,}5$ мм $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Найти: Δh.

Решение. Поверхность смачивающей жидкости между пластинами принимает цилиндрический вид (рис. 16).

Лапласовское давление равно:

$$p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно-перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. Для цилиндрической поверхности одно из нормальных сечений — сечение, идущее вдоль образующей цилиндра. Для него $R_1 = \infty$. Второе, перпендикулярное ему сечение, дает окружность радиусом $R_2 = \frac{r}{2}$, где r — расстояние между плоскостями.

Поэтому добавочное давление

$$p = \frac{\sigma}{R_2} = \frac{2\sigma}{r}.$$

Это давление уравновешивает давление столба жидкости высотой h, поэтому

$$\frac{2\sigma}{r} = \rho g h.$$

Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

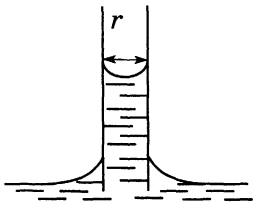


Рис. 16

В нашем случае

$$h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g r_1};\ h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g r_2};$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Производим вычисления:

$$\Delta h = \frac{2 \cdot 0{,}022}{0{,}8 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}\left(\frac{1}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}}\right) \simeq 5{,}61 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}).$$

54. Из капиллярной трубки с радиусом канала 0,2 мм по капле вытекает жидкость. Масса 100 капель равна 0,282 г. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Дано: $r = 0{,}2$ мм $= 2 \cdot 10^{-4}$ м; $n = 100$; $m = 0{,}282$ г $= 2{,}82 \cdot 10^{-4}$ кг.

Найти: σ.

Решение. Капля отрывается в тот момент, когда ее сила тяжести равна силе поверхностного натяжения. Считая радиус шейки капли равным радиусу капилляра, можно записать $2\pi r\sigma = \frac{mg}{n}$, откуда

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r n};$$

$$\sigma = \frac{2{,}82 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}8}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 100} \simeq 2{,}2 \cdot 10^{-2}\ (\text{Н/м}).$$

55. Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром 10 см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано: $d = 10$ см.

Найти: p, A.

Решение. Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности — внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обоих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$p = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r},$$

где r — радиус пузыря.

Так как $r = \frac{d}{2}$, то $p = \frac{8\sigma}{d}$.

Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 40$ мН/м, диаметр пузыря $d = 10$ см $= 0{,}1$ м. Следовательно,

$$p = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 3{,}2 \text{ (Па)}.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS, выражается формулой:

$$A = \sigma \cdot \Delta S, \text{ или } A = \sigma(S - S_0).$$

В данном случае S — общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря, S_0 — общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивавшей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая S_0, получим:

$$A \approx \sigma S = 2\pi d^2 \sigma.$$

Сделав подстановку числовых значений величин, получим:

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \simeq 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В баллоне емкостью 30 л находится сжатый воздух при температуре 17 °С. После того как часть воздуха израсходовали, давление понизилось на 2 МПа. Какая масса воздуха была израсходована, если температура его оставалась постоянной? **Ответ:** 722 г.

2. Сколько молекул азота находится в сосуде емкостью 1 л, если средняя квадратичная скорость движения молекул азота 500 м/с, а давление на стенки сосуда 1 кПа? **Ответ:** $2{,}58 \cdot 10^{20}$.

3. Определить среднее число столкновений между молекулами воздуха за 1 с в 1 см^3 при температуре 7 °С, если плотность воздуха 0,05 кг/м^3. **Ответ:** $9{,}7 \cdot 10^{25}$ с$^{-1}$.

4. Вычислить коэффициент диффузии воздуха при давлении 10^5 Па и температуре 17 °С. **Ответ:** $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

5. Определить молярную массу газа, если удельные теплоемкости равны: $c_V = 650$ Дж/(кг·К), $c_p = 910$ Дж/(кг·К). Чему равны молярные теплоемкости C_V и C_p этого газа? **Ответ:** $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; 20,8 Дж/(моль·К); 29,1 Дж/(моль·К).

6. Определить полную энергию молекул кислорода массой 64 кг, находящегося при температуре 47 °С. Какова энергия вращательного движения молекул кислорода? **Ответ:** 13,22 кДж; 5,32 кДж.

7. Азот массой 2 кг при температуре 17 °С и давлении 10^5 Па сжимают до давления 1 МПа. Определить работу, затраченную на сжатие, если газ сжимают: 1) изотермически, 2) адиабатно. **Ответ:** 396 кДж; 400 кДж.

8. При изобарном расширении воздуха массой 1 кг его объем увеличился на 100 л. Найти температуру и работу воздуха при расширении, если начальное давление 10^5 Па, а начальная температура 15 °С. **Ответ:** 50 °С; 10,03 кДж.

9. Определить изменение энтропии при изотермическом расширении водорода массой 1 г, если объем газа увеличился в 3 раза. **Ответ:** 4,56 Дж/К.

10. При изобарном расширении гелия массой 2 г его объем изменился в 10 раз. Каково изменение энтропии? **Ответ:** 23,9 Дж/К.

11. Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя 127 °С, холодильника 15 °С. На сколько надо изменить температуру нагревателя (при неизменной температуре холодильника), чтобы увеличить КПД машины в 2 раза? **Ответ:** на 255 К.

12. В сосуде объемом 1 л под давлением 1 МПа находится кислород. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу для увеличения его объема в 2 раза при изобарном расширении и для увеличения его давления в 2 раза при изохорном процессе? **Ответ:** 3,5 кДж; 2,5 кДж.

13. Считая азот идеальным газом, определить его удельные теплоемкости при изохорном и изобарном процессах. **Ответ:** 742 Дж/(кг · К); 1,04 кДж/(кг · К).

14. Температуру смеси азота массой 28 г и кислорода массой 32 г, находящуюся в закрытом сосуде, изменили на 20 °С. Определить изменение внутренней энергии смеси. **Ответ:** 0,831 кДж.

15. Углекислый газ массой 6,6 кг занимает объем 3,75 $м^3$ при давлении 0,1 МПа. Определить температуру газа, считая его идеальным; реальным. **Ответ:** $T_{ид} = 301$ К; $T_р = 302$ К.

ЧАСТЬ 3

Электричество и магнетизм

Основные законы и формулы

- Закон Кулона $\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
- Напряженность электрического поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$
- Напряженность поля:

  точечного заряда $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$

  бесконечно длинной заряженной нити $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$

  равномерно заряженной плоскости $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$

  между двумя равномерно и разноименно заряженными бесконечными параллельными плоскостями $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$

- Напряженность поля, создаваемого металлической заряженной сферой радиусом R на расстоянии r от ее центра:

  на поверхности сферы ($r = R$) $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$

  вне сферы ($r > R$) $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$

- Смещение электрическое (индукция) $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$
- Поток напряженности электрического поля $\Phi = \int\limits_S E_n dS$
- Работа перемещения заряда в электрическом поле из точки *1* в точку *2* $A = Q\int\limits_1^2 E_l dl;\ A = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$
- Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$

- Потенциал электрического поля металлической полой сферы радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

  на поверхности и внутри сферы ($r \leqslant R$) $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$

  вне сферы ($r > R$) $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$

- Связь потенциала с напряженностью поля $E_l = -\dfrac{d\varphi}{dl}$; $\vec{E} = -\text{grad}\ \varphi$

- Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$

- Электроемкость:

  уединенного проводника $C = \dfrac{Q}{\varphi}$

  плоского конденсатора $C = \dfrac{Q}{U}$; $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$

  слоистого конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \ldots + d_n/\varepsilon_n}$

- Электроемкость батареи конденсаторов, соединенных:

  параллельно $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

  последовательно $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \ldots + \dfrac{1}{C_n}$

- Энергия поля:

  заряженного проводника $W_э = \dfrac{C\varphi^2}{2} = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q\varphi}{2}$

  заряженного конденсатора $W_э = \dfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V$

  поляризованного диэлектрика $W_э = \dfrac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2 V$

- Объемная плотность энергии электрического поля $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{ED}{2} = \dfrac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$

- Сила тока $I = \dfrac{dQ}{dt}$

- Закон Ома для замкнутой (полной) цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$

- Закон Ома в дифференциальной форме $j = \gamma E = \dfrac{E}{\rho}$

- Закон Джоуля—Ленца $Q = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$
- Сопротивление однородного проводника $R = \frac{\rho l}{S}$
- Удельная проводимость $\gamma = \frac{1}{\rho}$
- Зависимость удельного сопротивления от температуры $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$
- Работа тока $A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2t}{R}$
- Полная мощность, выделяющаяся в цепи $N = I \cdot \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}$
- КПД источника тока $\eta = \frac{R}{R + r}$
- Закон Ампера $F = IBl\sin\alpha$
- Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в магнитное поле $M = p_m B\sin\alpha$
- Магнитный момент контура с током $p_m = IS$
- Связь магнитной индукции с напряженностью магнитного поля $B = \mu\mu_0 H$
- Закон Био—Савара—Лапласа $dB = \frac{\mu\mu_0 I\sin\alpha}{4\pi r^2}dl$
- Магнитная индукция в центре кругового тока $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}$
- Магнитная индукция поля:
  - созданного бесконечно длинным прямолинейным проводником с током $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}$
  - созданного отрезком проводника с током $B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$
  - поля бесконечно длинного соленоида $B = \mu\mu_0 nI$
- Сила взаимодействия двух прямолинейных длинных параллельных проводников с током, $l \gg d$ $F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$

- Напряженность магнитного поля, создаваемого движущимся зарядом Q $H = \frac{Q\upsilon \sin\alpha}{4\pi r^2}$
- Сила Лоренца $\vec{F}_{Л} = Q\vec{E} + Q\vec{\upsilon} \times \vec{B}$
- Магнитный поток однородного магнитного поля $\Phi = BS\cos\alpha$
- Работа по перемещению контура с током в магнитном поле $A = I\Delta\Phi$
- Основной закон электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$
- Потокосцепление $\psi = N\Phi$
- Потокосцепление соленоида $\psi = LI$
- Электродвижущая сила самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}$
- Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0 n^2 lS$
- Энергия магнитного поля соленоида $W_{м} = \frac{LI^2}{2}$
- Объемная плотность энергии магнитного поля $w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$

Примеры решения задач

1. Электростатика

1. Два заряда находятся в керосине ($\varepsilon = 2$) на расстоянии 1 см друг от друга и взаимодействуют с силой 2,7 Н. Величина одного заряда в 3 раза больше другого. Определить величину каждого заряда.

Дано: $F = 2{,}7$ Н; $r = 0{,}01$ м; $\varepsilon = 2$; $q_1 = 3q$; $q_2 = q$.

Найти: q_1, q_2.

Решение. Сила взаимодействия точечных зарядов определяется по закону Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где q_1 и q_2 — заряды, ε — диэлектрическая проницаемость среды (в данной задаче — керосина), ε_0 — электрическая по-

стоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, r — расстояние между зарядами. По условию задачи $q_1 = 3q$; $q_2 = q$.

Тогда

$$F = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

откуда

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2 F}{3}};\ q = \sqrt{\frac{2{,}7 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{3}} \approx$$
$$\approx 1{,}4 \cdot 10^{-7}\ (\text{Кл}).$$

Следовательно, $q_1 = 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ Кл; $q_2 \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-7}$ Кл.

2. Два точечных заряда, находясь в воде ($\varepsilon_1 = 81$) на расстоянии l друг от друга, взаимодействуют с некоторой силой F. Во сколько раз необходимо изменить расстояние между ними, чтобы они взаимодействовали с такой же силой в воздухе ($\varepsilon_2 = 1$)?

Дано: $F_1 = F_2 = F$; l_1; $\varepsilon_1 = 81$; $\varepsilon_2 = 1$.

Найти: l_2/l_1.

Решение. Заряды во всякой среде взаимодействуют с силой, определяемой по закону Кулона. Выражения для сил F_1 и F_2, с которыми заряды взаимодействуют в воде и в воздухе, имеют вид:

$$F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 l_1^2},\ F_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 l_2^2},$$

где q_1 и q_2 — заряды, ε_1 и ε_2 — диэлектрическая проницаемость воды и воздуха, ε_0 — электрическая постоянная, l_1 и l_2 — расстояние между зарядами в воде и воздухе соответственно. Учитывая, что $F_1 = F_2$, получим:

$$\frac{1}{\varepsilon_1 l_1^2} = \frac{1}{\varepsilon_1 l_2^2},\ \text{откуда}\ \frac{l_2^2}{l_1^2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ \text{и}\ \frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \sqrt{81} = 9.$$

3. Два шарика одинакового объема, обладающие массой $0{,}6 \times \times 10^{-3}$ г каждый, подвешены на шелковых нитях длиной 0,4 м так, что их поверхности соприкасаются. Угол, на который разошлись нити при сообщении шарикам одинаковых зарядов, равен 60°. Найти величину зарядов и силу электрического отталкивания.

Дано: $m = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ г $= 0{,}6 \cdot 10^{-7}$ кг; $l = 0{,}4$ м; $\alpha = 60°$; $q_1 = q_2 = q$.

Найти: q, $F_э$.

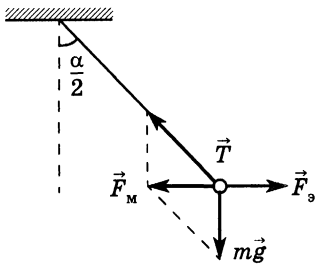


Рис. 17

Решение. В результате электростатического отталкивания с силой $F_э$ заряды разойдутся на расстояние $r = l$. Как видно из рис. 17, сила $F_э$ будет уравновешена механической силой $F_м$, равной

$$F_м = mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

По закону Кулона

$$F_э = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Учитывая, что $F_э = F_м$, получим

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$q = \sqrt{mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2};$$

$$q = \sqrt{6\cdot10^{-7}\cdot9{,}8\cdot0{,}577\cdot4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}16} \simeq$$
$$\simeq 7{,}8\cdot10^{-9}\ (\text{Кл}).$$

Тогда сила отталкивания будет равна

$$F_э = \frac{7{,}8^2\cdot10^{-18}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}16} \simeq 3{,}4\cdot10^{-6}\ (\text{Н}).$$

4. В элементарной теории атома водорода принимают, что электрон вращается вокруг протона по окружности. Какова скорость вращения электрона, если радиус орбиты $0{,}53\cdot10^{-10}$ м?

Дано: $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$; $r = 0{,}53\cdot10^{-10}$ м; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

Найти: v.

Решение. Сила электрического взаимодействия электрона с ядром (протоном) атома водорода определяется по закону Кулона

$$F_э = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где q — заряд электрона и протона, r — радиус орбиты — расстояние между электроном и протоном, ε_0 — электрическая постоянная. Центростремительная сила $F_ц$, определяющая вращение электрона по круговой орбите, имеет выражение

$$F_ц = \frac{mv^2}{r}$$

и численно равна силе электрического взаимодействия $F_э$. Приравнивая $F_ц = F_э$, получим

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 rm}};$$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-38}}{12{,}56 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq$$

$$\simeq 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

5. Вычислить ускорение, сообщаемое одним электроном другому, находящемуся от первого в вакууме на расстоянии 1 мм.

Дано: $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $r = 1$ мм $= 10^{-3}$ м.

Найти: a.

Решение. По закону Кулона электроны, находящиеся на расстоянии r, взаимодействуют (отталкиваются) с силой:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Под действием этой силы в соответствии со вторым законом Ньютона электрон приобретает ускорение

$$a = \frac{F}{m},$$

где m — масса электрона. Тогда

$$a = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2 m};$$

$$a = \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \simeq 2{,}5 \cdot 10^8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

6. Два равных по величине заряда $3 \cdot 10^{-9}$ Кл расположены в вершинах при острых углах равнобедренного прямоугольного треугольника на расстоянии $2\sqrt{2}$ см. Определить, с какой силой эти два заряда действуют на третий заряд 10^{-9} Кл, расположенный в вершине при прямом угле треугольника. Рассмотреть случаи, когда первые два заряда одно- и разноименные.

Дано: $q_1 = q_2 = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл; $q_3 = 10^{-9}$ Кл; $r = 2\sqrt{2}$ см $= 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: F.

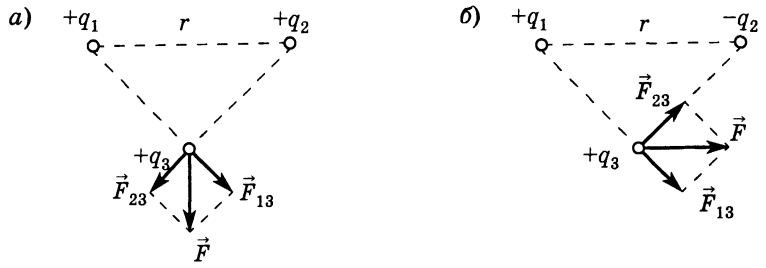


Рис. 18

Решение. Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами определяется по закону Кулона $F = \frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. По принципу суперпозиции поле каждого заряда q_1 и q_2 действует на заряд q_3 независимо. Вследствие этого на заряд q_3 действуют независимо силы $\vec{F}_{13}$ и $\vec{F}_{23}$ (рис. 18, *а*). Векторная сумма сил $\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$ будет искомой величиной. Как видно из рис. 18, сила $\vec{F}$ в обоих случаях будет одинаковой по абсолютной величине. Перейдем от векторного к скалярному выражению сил. Введем обозначение $F_{13} = F_{23} = F_3$. Тогда из геометрических соображений

$$F = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = \sqrt{2}\,F_3 = \sqrt{2}\,\frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{13}^2},$$

где r_{13} (или r_{12}) — расстояние между зарядами q_1 и q_3 и (или) q_1 и q_2,

$$r_{13} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Подставим числовые значения и определим F:

$$F = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2 \cdot 10^{-4}} \simeq 9{,}5 \cdot 10^{-5}\ (\text{Н}).$$

7. Два равных отрицательных заряда по 9 нКл находятся в воде на расстоянии 8 см друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля в точке, расположенной на расстоянии 5 см от зарядов.

Дано: $Q_1 = Q_2 = -9 \cdot 10^{-9}$ Кл; $\varepsilon = 81$; $r_0 = 0{,}08$ м; $r_1 = r_2 = 0{,}05$ м.

Найти: E, φ.

Решение. Напряженность поля, создаваемого в точке A (рис. 19) зарядами Q_1 и Q_2 по принципу суперпозиции полей, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждым из зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \qquad (1)$$

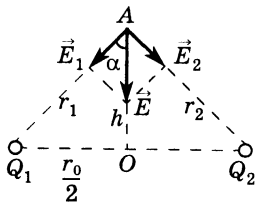


Рис. 19

По теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 2\alpha}\,. \qquad (2)$$

Напряженность поля точечного заряда Q:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Заряды Q_1 и Q_2 отрицательны, следовательно, векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены по линиям напряженности к зарядам. По условию задачи заряды $Q_1 = Q_2$ расположены на одинаковом расстоянии от точки A, поэтому $E_1 = E_2$. Следовательно, формула (2) имеет вид

$$E = 2E_1\cos\alpha,$$

где

$$\cos\alpha = \frac{h}{r_1},$$

$$h = OA = \sqrt{r_1^2 - \frac{r_0^2}{4}};$$

$$h = \sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2 - (4\cdot 10^{-2})^2} = 3\cdot 10^{-2}\ (\text{м}).$$

Тогда напряженность поля в точке A:

$$E = \frac{2Q_1 h}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^3};$$

$$E = \frac{2\cdot 9\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{4\cdot 3{,}14\cdot 81\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot (0{,}05)^3} \simeq 480\ (\text{В/м}).$$

Потенциал φ, создаваемый системой точечных зарядов в данной точке поля, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$. Потенциал φ результирующего поля в точке A равен $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = \frac{2Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1};$$

$$\varphi = \frac{-2 \cdot 9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 81 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \simeq -40 \text{ (В)}.$$

8. В вершинах квадрата со стороной 0,1 м помещены заряды по 0,1 нКл. Определить напряженность и потенциал поля в центре квадрата, если один из зарядов отличается по знаку от остальных.

Дано: $q_1 = 0{,}1$ нКл; $q_2 = q_3 = q_4 = -0{,}1$ нКл; $a = 0{,}1$ м.

Найти: E, φ.

Решение. Напряженность E поля, создаваемого системой зарядов, равна геометрической сумме напряженностей $\vec{E}_i$ полей, создаваемых каждым из i зарядов: $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$. В данной задаче

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4.$$

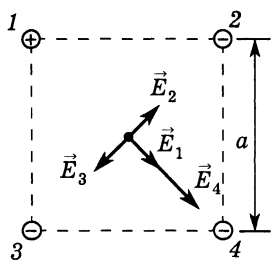


Рис. 20

Как видно из рис. 20,

$$E = E_1 + E_4,$$

а так как $E_1 = E_4$, то $E = 2E_1$ или

$$E = 2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость (для воздуха $\varepsilon = 1$), $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ — расстояние от центра квадрата до заряда

$$E = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1^2} \simeq 360 \text{ (В)}.$$

Потенциал φ поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов φ_i полей, создаваемых каждым из i зарядов: $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$. В условиях данной задачи

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

Учитывая знаки зарядов, имеем

$$\varphi = \varphi_3 + \varphi_4,$$

а так как $\varphi_3 = \varphi_4$, то $\varphi = 2\varphi_3$.

$$\varphi = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1} \simeq 25{,}4 \text{ (В)}.$$

9. Пространство между двумя параллельными плоскостями с поверхностной плотностью зарядов $+5 \cdot 10^{-8}$ и $-9 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2 заполнено стеклом. Определить напряженность поля: между плоскостями; вне плоскостей.

Дано: $\sigma_1 = +5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2; $\sigma_2 = -9 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^2; $\varepsilon = 7$.

Найти: E', E''.

Решение. Напряженность поля, создаваемого плоскостью, заряженной с поверхностной плотностью заряда σ, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды (для стекла $\varepsilon_1 = 7$, для воздуха $\varepsilon_2 = 1$). Направление векторов $\vec{E}$ полей, создаваемых заряженными плоскостями, показано на рис. 21.

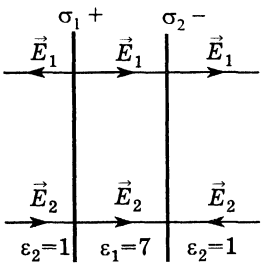


Рис. 21

Очевидно, что в зазоре между плоскостями $E' = E_1 + E_2$, так как поля совпадают по направлению:

$$E' = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_1\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2\varepsilon_1\varepsilon_0};$$

$$E' = \frac{14 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 7 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \simeq 1130 \text{ (В/м)}.$$

В пространстве вне зазора между плоскостями напряженности E_1 и E_2 имеют противоположные направления и

$$E'' = E_2 - E_1 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{|\sigma_2| - |\sigma_1|}{2\varepsilon_1\varepsilon_0};$$

$$E'' = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \simeq 2260 \text{ (В/м)}.$$

10. На расстоянии 8 см друг от друга в воздухе находятся два заряда по 1 нКл. Определить напряженность и потенциал поля в точке, находящейся на расстоянии 5 см от зарядов.

Дано: $r = 0{,}08$ м; $q_1 = q_2 = 10^{-9}$ Кл; $r_1 = 0{,}05$ м.

Найти: E, φ.

Решение. Напряженность E и потенциал φ поля, созданного точечным зарядом в точке A на расстоянии r от заряда, определяются по формулам:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Из рис. 22 видно, что $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $E_1 = E_2$ и значение E определяется по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} = \sqrt{2E_1^2 + 2E_1^2\cos\alpha} =$$

$$= E_1\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\alpha)} = 2E_1\cos\frac{\alpha}{2};$$

$\cos\frac{\alpha}{2}$ определим из ΔABC: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

$$E = \frac{10^{-9}\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 25\cdot 10^{-4}\cdot 5} \simeq 4318\ (\text{В/м}).$$

Потенциал поля φ в точке A равен

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_1 = 2\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1};$$

$$\varphi = \frac{2\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 5\cdot 10^{-2}} \simeq 360\ (\text{В}).$$

11. Заряды по 1 нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,2 м. Равнодействующая сил, действующих на четвертый заряд, помещенный на середине одной из сторон треугольника, равна 0,6 мкН. Определить этот заряд, напряженность и потенциал поля в точке его расположения.

Дано: $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-9}$ Кл; $a = 0{,}2$ м; $F = 6\cdot 10^{-7}$ Н.

Найти: q_4, E, φ.

Решение. Напряженность E поля точечного заряда q на расстоянии r от него определяется по формуле:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Как видно из рис. 23, напряженность поля в точке A на расстоянии $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ равна:

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2};\ E_2 = \frac{10^{-9}\cdot 4}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}2^2\cdot 3} = 300\ (\text{В/м}).$$

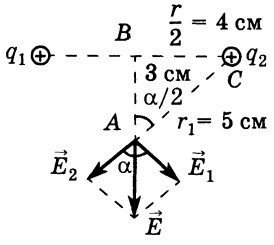


Рис. 22

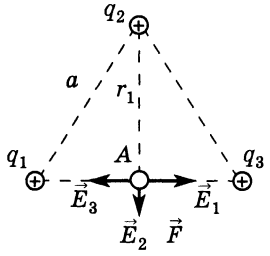


Рис. 23

Заряд q_4 определим из формулы $F = q_4 E$, откуда

$$q_4 = \frac{F}{E};$$

$$q_4 = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{300} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ (Кл)}.$$

Потенциал поля φ в точке A равен сумме потенциалов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

При этом

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{a}{2}};$$

$$\varphi_1 = \frac{10^{-9} \cdot 2}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \simeq 90 \text{ (В)};$$

$$\varphi_2 = \frac{q \cdot 2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a\sqrt{3}};$$

$$\varphi_2 = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{3}} \simeq 52 \text{ (В)}.$$

$$\varphi = 2 \cdot 90 + 52 = 232 \text{ (В)}.$$

12. Два одинаковых заряда находятся в воздухе на расстоянии 0,1 м друг от друга. Напряженность поля в точке, удаленной на расстоянии 0,06 м от одного и 0,08 м от другого заряда, равна 10 кВ/м. Определить потенциал поля в этой точке и значение заряда.

Дано: $E = 10^4$ В/м; $r_3 = 0{,}1$ м; $r_2 = 0{,}06$ м; $r_1 = 0{,}08$ м; $q_1 = q_2 = q$.

Найти: q, φ.

Решение. Напряженность E и потенциал φ поля точечного заряда q определяется по формулам:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

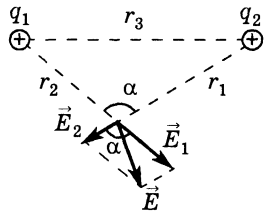


Рис. 24

Как видно из рис. 24,

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2},$$

так как $r_3^2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$E = \sqrt{\frac{q^2}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2)^2} + \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2)^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{r_2^4} + \frac{1}{r_1^4}} = \frac{q\sqrt{r_1^4 + r_2^4}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2 r_2^2}.$$

Откуда

$$q = \frac{E \cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2 r_2^2}{\sqrt{r_1^4 + r_2^4}};$$

$$q = \frac{10^{-4} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}06^2 \cdot 0{,}08^2}{\sqrt{0{,}06^4 + 0{,}08^4}} \simeq 3{,}5 \cdot 10^{-9}\ (\text{Кл}).$$

Потенциал

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right);$$

$$\varphi = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}06} + \frac{1}{0{,}08}\right) = 918\ (\text{В}).$$

13. Электрон движется по направлению силовых линий однородного поля напряженностью 2,4 В/м. Какое расстояние он пролетит в вакууме до полной остановки, если его начальная скорость $2 \cdot 10^6$ м/с? Сколько времени будет длиться полет?

Дано: $E = 2{,}4$ В/м; $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с; $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг; $v_к = 0$.

Найти: s, t.

Решение. На электрон в электрическом поле действует сила $F = qE$, направленная навстречу его движению. По второму закону Ньютона ускорение электрона под действием силы F равно:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}.$$

С другой стороны, ускорение a равно:

$$a = \frac{|v_к - v_0|}{t} = \frac{v_0}{t}.$$

Приравнивая эти выражения, определим время t до полной остановки электрона:

$$\frac{v_0}{t} = \frac{qE}{m}; \quad t = \frac{mv_0}{qE};$$

$$t = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}4} \simeq 4{,}7 \cdot 10^{-6}\ (\text{с}).$$

За это время электрон пройдет путь s, равный

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2t} = \frac{v_0 t}{2};$$

$$s = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-6}}{2} = 4{,}7\ (\text{м}).$$

14. Две бесконечно длинные, равномерно заряженные нити с линейной плотностью зарядов $6 \cdot 10^{-5}$ Кл/м расположены на расстоянии 0,2 м друг от друга. Найти напряженность электрического поля, созданного в точке, удаленной на 0,2 м от каждой нити.

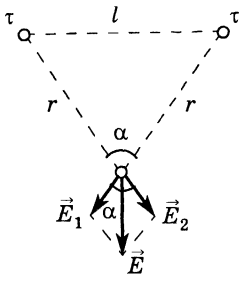


Рис. 25

Дано: $\tau = 6 \cdot 10^{-5}$ Кл/м; $r = 0{,}2$ м; $l = 0{,}2$ м.

Найти: E.

Решение. Напряженность поля E, создаваемого длинной, равномерно заряженной нитью с линейной плотностью заряда τ на расстоянии r от нее, определяется по формуле:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Вектор $\vec{E}$ напряженности суммарного электрического поля будет равен $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Как видно из рис. 25, угол α между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равен 60°. Величину вектора $\vec{E}$ определим по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}.$$

Так как $E_1 = E_2$,

то $$E = E_1\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\sqrt{2(1+\cos\alpha)};$$

$$E = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2}\sqrt{2(1+0{,}5)} \simeq 9{,}3 \cdot 10^6 \text{ (В/м)}.$$

15. Две параллельные металлические пластины, расположенные в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью 2,2, обладают поверхностной плотностью заряда 3 и 2 мкКл/м^2. Определить напряженность и индукцию электрического поля между пластинами и вне пластин.

Дано: $\varepsilon = 2{,}2$; $\sigma_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2; $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

Найти: $E_м$, $E_в$, $D_м$, $D_в$.

Решение. Напряженность поля, создаваемого каждой из пластин с поверхностной плотностью зарядов σ, определяется по формуле:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Направления векторов напряженности полей, создаваемых пластинами, показаны на рис. 26. Учитывая направление век-

торов, получим, что напряженность поля $E_м$ в зазоре между пластинами равна:

$$E_м = E_1 - E_2,$$

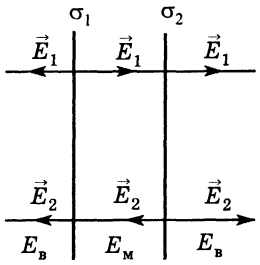


Рис. 26

а в пространстве вне пластин —

$$E_в = E_1 + E_2.$$

$$E_м = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2);$$

$$E_м = \frac{(3-2)\cdot 10^{-6}}{2\cdot 2{,}2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} \simeq 2{,}57\cdot 10^4\ (\text{В/м}).$$

$$E_в = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma_{21}}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2);$$

$$E_в = \frac{(3+2)\cdot 10^{-6}}{2\cdot 2{,}2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} \simeq 1{,}28\cdot 10^5\ (\text{В/м}).$$

Индукция D и напряженность E электрического поля связаны соотношением $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$. Тогда:

$$D_м = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};\ D_м = \frac{10^{-6}}{2} \simeq 5\cdot 10^{-7}\ (\text{Кл/м}^2).$$

$$D_в = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2};\ D_в = \frac{5\cdot 10^{-6}}{2} \simeq 2{,}5\cdot 10^{-6}\ (\text{Кл/м}^2).$$

16. Определить поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую шаровую поверхность, внутри которой находятся три точечных заряда +2, −3 и +5 нКл. Рассмотреть случаи, когда система зарядов находится в вакууме и в воде.

Дано: $q_1 = +2\cdot 10^{-9}$ Кл; $q_2 = -3\cdot 10^{-9}$ Кл; $q_3 = +5\cdot 10^{-9}$ Кл; $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = 81$.

Найти: Φ_E.

Решение. В общем случае поток вектора напряженности Φ_E сквозь поверхность S равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n ds,$$

где E_n — проекция вектора E на нормаль n к поверхности, $E_n = E\cos\alpha$.

Для шаровой поверхности, в центре которой помещен точечный заряд, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ и $E_n = E$. В каждой точке шаровой поверхности E — величина постоянная и определяется по формуле

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1)$$

Тогда поток вектора напряженности Φ_E сквозь шаровую поверхность будет иметь вид

$$\Phi_E = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = E \cdot 4\pi r^2. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), после преобразований для одного точечного заряда получаем $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$. На основании теоремы Остроградского—Гаусса для системы зарядов полный поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность произвольной (в том числе шаровой) формы равен

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (3)$$

Подставим в (3) числовые значения и получим:

а) в случае, когда заряды находятся в вакууме,

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + q_2 + q_3); \ \Phi_E = \frac{(+2-3+5)\cdot 10^{-9}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \simeq 452 \text{ (В/м)};$$

б) в случае, когда заряды находятся в воде,

$$\Phi_E = \frac{(+2-3+5)\cdot 10^{-9}}{81 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \simeq 5{,}6 \text{ (В/м)}.$$

17. Электрическое поле создается тонкой, бесконечно длинной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда 10^{-10} Кл/м. Определить поток вектора напряженности через цилиндрическую поверхность длиной 2 м, ось которой совпадает с нитью.

Дано: $\tau = 10^{-10}$ Кл/м; $h = 2$ м.

Найти: Φ_E.

Решение. Нить длиной h с линейной плотностью заряда τ содержит заряд $q = \tau h$. Линии напряженности направлены по нормали к нити по всевозможным направлениям и будут пронизывать только боковую поверхность цилиндра. В соответствии с теоремой Остроградского—Гаусса поток Φ_E вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность равен

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\Phi_E = \frac{\tau h}{\varepsilon\varepsilon_0}; \ \Phi_E = \frac{10^{-10} \cdot 2}{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \simeq 22{,}6 \text{ (В/м)}.$$

18. Заряд $1 \cdot 10^{-9}$ Кл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 1 см от поверхности заряженного шара радиусом 9 см. Поверхностная плотность заряда шара $1 \cdot 10^{-4}$ Кл/м^2. Определить совершаемую при этом работу. Какая работа совершается на последних 10 см пути?

Дано: $q = 10^{-9}$ Кл; $\sigma = 10^{-4}$ Кл/м^2; $R = 9$ см $= 0{,}09$ м; $r_1 = 1$ см $= 0{,}01$ м ; $r_2 = 10$ см $= 0{,}1$ м; $\varepsilon = 1$.

Найти: A_1, A_2.

Решение. Работа внешней силы A_1 по перемещению заряда q из точки поля с потенциалом φ_1 в другую точку с потенциалом φ_2 равна по абсолютной величине, но противоположна по знаку работе A_1' сил поля по перемещению заряда между этими точками поля, т. е. $A_1 = -A_1'$. Работа сил электрического поля определяется по формуле $A_1' = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Тогда

$$A_1 = q(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{1}$$

где φ_1 — потенциал в начальной точке; φ_2 — потенциал в конечной точке.

Потенциал, создаваемый заряженным шаром радиусом R в точке на расстоянии r от его поверхности, определяется по формуле

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R + r)}, \tag{2}$$

где $q_0 = \sigma 4\pi R^2$ — заряд шара.

Потенциал φ_1 в бесконечно удаленной точке (при $r = \infty$) будет равен нулю. Потенциал φ_2 из (2) подставим в (1) и после преобразований получим

$$A_1 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R + r_1)}. \tag{3}$$

Подставляя числовые значения в (3), получаем

$$A_1 = \frac{10^{-9} \cdot 10^{-4} \cdot 81 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-1}} \simeq 9{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Работу на последних 10 см пути можно определить по формуле

$$A_2 = q(\varphi_2 - \varphi_1'), \tag{4}$$

где $\varphi_1' = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R + r_1 + r_2)}$ — потенциал в точке на расстоянии $(R + r_1 + r_2)$ от центра шара.

Подставляя выражение для φ_1' и φ_2 в (4), после преобразований получаем:

$$A_2 = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R + r_1)} - \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R + r_1 + r_2)}. \qquad (5)$$

Первое слагаемое в (5) численно равно A_1.

Подставим числовые значения и вычислим A_2:

$$A_2 = 9{,}2 \cdot 10^{-4} - \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 81 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-1}} \simeq 4{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

19. Заряд 1 нКл переносится в воздухе из точки, находящейся на расстоянии 1 м от бесконечно длинной, равномерно заряженной нити, в точку на расстоянии 10 см от нее. Определить работу, совершаемую против сил поля, если линейная плотность заряда нити 1 мкКл/м. Какая работа совершается на последних 20 см пути?

Дано: $r_0 = 0{,}1$ м; $r_1 = 1$ м; $r_2 = 0{,}2$ м; $Q = 10^{-9}$ Кл; $\varepsilon = 1$; $\tau = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл/м.

Найти: A_1, A_2.

Решение. Работа внешней силы по перемещению заряда Q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_0 равна:

$$A = Q(\varphi_0 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Бесконечная, равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда τ создает аксиально симметричное поле напряженностью $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Напряженность и потенциал этого поля связаны соотношением

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ откуда } d\varphi = -Edr.$$

Разность потенциалов точек поля на расстоянии r_1 и r_0 от нити

$$\varphi_0 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_0} Edr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_0};$$

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_0};\ \varphi_0 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_0}. \qquad (2)$$

Подставляя в формулу (1) найденное выражение для разности потенциалов из (2), определим работу, совершаемую внешними силами по перемещению заряда из точки, находя-

щейся на расстоянии 1 м, до точки, расположенной на расстоянии 0,1 м от нити:

$$A_1 = \frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_0};$$

$$A_1 = \frac{10^{-9}\cdot 10^{-6}\cdot \ln 10}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} \simeq 4{,}1\cdot 10^{-5}\ (\text{Дж}).$$

Работа по перемещению заряда на последних 20 см пути равна

$$A_2 = \frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_0};$$

$$A_2 = \frac{10^{-9}\cdot 10^{-6}\cdot \ln 2}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} \simeq 1{,}24\cdot 10^{-5}\ (\text{Дж}).$$

20. В поле бесконечной, равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2 перемещается заряд из точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от плоскости, в точку на расстоянии 0,5 м от нее. Определить заряд, если при этом совершается работа 1 мДж.

Дано: $\sigma = 10^{-5}$ Кл/м^2; $r_1 = 0{,}5$ м; $r_2 = 0{,}1$ м; $A = 10^{-3}$ Дж.

Найти: q.

Решение. Напряженность поля E, создаваемая заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

а на заряд q со стороны поля действует сила

$$F = qE = q\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Работа этой силы на пути dr будет равна $dA = Fdr$, а на пути от r_1 до r_2

$$A = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = \int_{r_1}^{r_2} q\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}dr = \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}(r_2 - r_1).$$

Отсюда

$$q = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 A}{\sigma(r_2 - r_1)};\ q = \frac{1\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{1\cdot 10^{-5}(0{,}5 - 0{,}1)} \simeq 4{,}4\cdot 10^{-9}\ (\text{Кл}).$$

21. Какую работу надо совершить, чтобы заряды 1 и 2 нКл, находящиеся в воздухе на расстоянии 0,5 м, сблизить до 0,1 м?

Дано: $q_1 = 10^{-9}$ Кл; $q_2 = 2\cdot 10^{-9}$ Кл; $r_1 = 0{,}5$ м; $r_2 = 0{,}1$ м.

Найти: A.

Решение. Работа A по перемещению заряда q_1 в поле, созданном зарядом q_2, определяется по формуле $A = q_1(\varphi_2 - \varphi_1)$,

где φ_2 и φ_1 — потенциал поля, созданного зарядом q_2 в соответствующих точках на расстоянии r_2 и r_1 от него:

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2};$$

$$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}.$$

$$A = q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right);$$

$$A = \frac{10^{-9}\cdot 2\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}5}\right) \simeq 1{,}4\cdot 10^{-7}\ (\text{Дж}).$$

22. Заряд −1 нКл переместился в поле заряда +1,5 нКл из точки с потенциалом 100 В в точку с потенциалом 600 В. Определить работу сил поля и расстояние между точками.

Дано: $q_1 = -1\cdot 10^{-9}$ Кл; $q_2 = +1{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл; $\varphi_1 = 100$ В; $\varphi_2 = 600$ В.

Найти: A, Δr.

Решение. Потенциал φ поля, созданного точечным зарядом q, равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где r — расстояние от заряда до данной точки поля.

$$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1},$$

откуда $$r_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\varphi_1};$$

$$r_1 = \frac{1{,}5\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 100} \simeq 13{,}5\cdot 10^{-2}\ (\text{м}).$$

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2},$$

откуда $$r_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\varphi_2};$$

$$r_2 = \frac{1{,}5\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 600} \simeq 2{,}25\cdot 10^{-2}\ (\text{м}).$$

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 11{,}25\cdot 10^{-2}\ (\text{м}).$$

Работа сил поля:

$$A = q_1(\varphi_1 - \varphi_2);\ A = 10^{-9}\cdot(100 - 600) = 5\cdot 10^{-7}\ (\text{Дж}).$$

23. Заряд −1 нКл притянулся к бесконечной плоскости с поверхностной плотностью заряда 0,2 мкКл/м^2. На каком расстоянии от плоскости находился заряд, если работа сил поля по его перемещению равна 1 мкДж?

Дано: $|q| = 1 \cdot 10^{-9}$ нКл; $\sigma = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2; $A = 1 \cdot 10^{-6}$ Дж.
Найти: r.

Решение. Напряженность E поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Величина E является величиной постоянной, а это значит, что сила $F = qE$, действующая на заряд q, будет постоянной. Работа dA силы F на пути dr равна $dA_r = Fdr$. Работа A_r на пути от r до 0 будет

$$A = \int_0^r Fdr = \int_0^r qEdr = \int_0^r \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} dr = \frac{q\sigma r}{2\varepsilon\varepsilon_0};$$

отсюда

$$r = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 A}{|q|\sigma}; \; r = \frac{10^{-6} \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-7}} = 8{,}85 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}.$$

24. Конденсатор с парафиновым диэлектриком заряжен до разности потенциалов 150 В. Напряженность поля в нем $6 \cdot 10^6$ В/м. Площадь пластин 6 см^2. Определить емкость конденсатора и поверхностную плотность заряда на обкладках ($\varepsilon = 2$).

Дано: $U = 150$ В; $E = 6 \cdot 10^6$ В/м; $S = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2; $\varepsilon = 2$.
Найти: C, σ.

Решение. В плоском конденсаторе напряженность поля равна: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Отсюда

$$\sigma = E\varepsilon\varepsilon_0 = 6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \simeq 1{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

Емкость C плоского конденсатора равна $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$.

Учитывая, что в плоском конденсаторе разность потенциалов U и напряженность E связаны соотношением $E = \frac{U}{d}$, где d — зазор между обкладками, выразим $d = \frac{U}{E}$. Теперь выражение для емкости конденсатора запишем в виде

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE}{U}; \; C = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{150} \simeq 4{,}25 \cdot 10^{-10} \text{ (Ф)}.$$

25. Вычислить емкость батареи, состоящей из трех конденсаторов емкостью 1 мкФ каждый, при всех возможных случаях их соединения.

Дано: $C_1 = C_2 = C_3 = 1 \cdot 10^{-6}$ Ф; $n = 3$.

Найти: $C_б$.

Решение. Емкость батареи конденсаторов вычисляется по формулам:

$C_б = \sum_{i=1}^{n} C_i$ — при параллельном соединении,

$\frac{1}{C_б} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$ — при последовательном.

При наличии трех конденсаторов одинаковой емкости возможны следующие схемы соединений:

1) параллельное соединение (рис. 27, *а*):

$$C_б = C_1 + C_2 + C_3 = 3 \text{ (мкФ)};$$

2) последовательное соединение (рис. 27, *б*):

$$\frac{1}{C_б} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = 3 \text{ (мкФ}^{-1}\text{)};$$

$$C_б = \frac{1}{3} \text{ (мкФ)};$$

3) комбинированное соединение по схеме (рис. 27, *в*):

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 2 \text{ (мкФ)}.$$

$$\frac{1}{C_б} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1{,}5 \text{ (мкФ}^{-1}\text{)};$$

$$C_б = \frac{1}{1{,}5} \simeq 0{,}67 \text{ (мкФ)};$$

4) комбинированное соединение по схеме (рис. 27, *г*):

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = 2 \text{ (мкФ)}; \; C_{23} = \frac{1}{2} \text{ (мкФ)}.$$

$$C_б = C_1 + C_{23} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \text{ (мкФ)}.$$

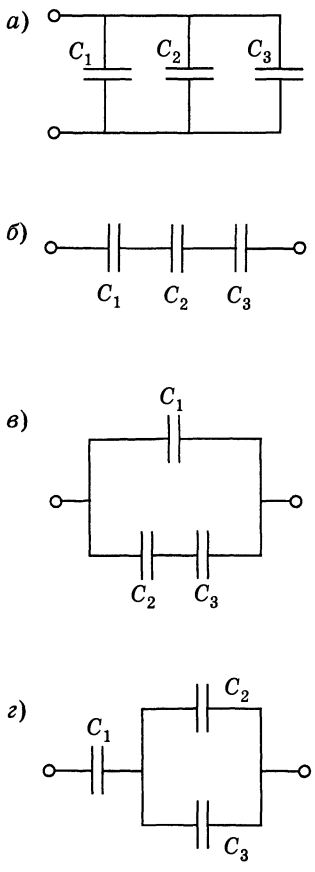


Рис. 27

26. Заряд на каждом из двух последовательно заряженных конденсаторов емкостью 18 и 10 пкФ равен 0,09 нКл. Определить напряжение на батарее конденсаторов; на каждом конденсаторе.

Дано: $C_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-11}$ Ф; $C_2 = 1 \cdot 10^{-11}$ Ф; $q = 9 \cdot 10^{-11}$ Кл.

Найти: U_1, U_2, U.

Решение. При последовательном соединении конденсаторов напряжение U на батарее равно $U = U_1 + U_2$. Напряжение U, заряд q и емкость C связаны соотношением $U = \frac{q}{C}$. Тогда

$$U_1 = \frac{q}{C_1};\ U_1 = \frac{9 \cdot 10^{-11}}{1{,}8 \cdot 10^{-11}} = 5\ (\text{В});$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2};\ U_2 = \frac{9 \cdot 10^{-11}}{10^{-11}} = 9\ (\text{В});\ U = 14\ (\text{В}).$$

27. Конденсатор емкостью 16 мкФ последовательно соединен с конденсатором неизвестной емкости, и они подключены к источнику постоянного напряжения 12 В. Определить емкость второго конденсатора, если заряд батареи 24 мкКл.

Дано: $C_1 = 16$ мкФ $= 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ Ф; $U = 12$ В; $q = 24 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Найти: C_2.

Решение. Напряжение U, заряд q, емкость конденсатора C связаны соотношением $U = \frac{q}{C}$.

Тогда

$$U_1 = \frac{q}{C_1};$$

$$U_1 = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-5}}{1{,}6 \cdot 10^{-5}} = 1{,}5\ (\text{В}).$$

При последовательном соединении напряжение U на батарее равно

$$U = U_1 + U_2 \text{ и } U_2 = U - U_1 = 10{,}5\ (\text{В}),$$

а емкость $C_2 = \frac{q}{C_2};\ C_2 = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-5}}{10{,}5} \simeq 2{,}3 \cdot 10^{-6}\ (\text{Ф}).$

28. Два конденсатора емкостью по 3 мкФ заряжены один до напряжения 100 В, а другой до 200 В. Определить напряжение между обкладками конденсатора, если они соединены параллельно одноименно заряженными обкладками; разноименно заряженными обкладками.

Дано: $C_1 = C_2 = 3$ мкФ; $U_1 = 100$ В; $U_2 = 200$ В.

Найти: U', U''.

Решение. Напряжение U, заряд q и емкость C конденсаторов связаны соотношением $q = CU$; тогда $q_1 = C_1U_1$; $q_2 = C_2U_2$. При соединении конденсаторов одноименно заряженными обкладками заряд батареи

$$q = q_1 + q_2,$$

емкость

$$C = C_1 + C_2 = 2C_1,$$

напряжение $U' = \frac{q}{2C_1} = \frac{U_1C_1 + U_2C_2}{2C_1} = \frac{C_1(U_1 + U_2)}{2C_1}$;

$$U' = \frac{100 + 200}{2} = 150 \text{ (В)}.$$

При соединении конденсаторов разноименно заряженными обкладками заряд батареи

$$q = q_2 - q_1,$$

емкость

$$C = C_1 + C_2 = 2C$$

и напряжение

$$U'' = \frac{q}{2C_1}.$$

Тогда: $U'' = \frac{q_2 - q_1}{2C_1} = \frac{U_2C_2 - U_1C_1}{2C_1} = \frac{C_1(U_2 - U_1)}{2C_1}$;

$$U'' = \frac{200 - 100}{2} = 50 \text{ (В)}.$$

29. Со скоростью $2 \cdot 10^7$ м/с электрон влетает в пространство между обкладками плоского конденсатора в середине зазора в направлении, параллельном обкладкам. При какой минимальной разности потенциалов на обкладках электрон не вылетит из конденсатора, если длина конденсатора 10 см, а расстояние между его обкладками 1 см?

Дано: $v = 2 \cdot 10^7$ м/с; $l = 0{,}1$ м; $d = 0{,}01$ м.

Найти: U.

Решение. На электрон, влетающий в поле конденсатора, со стороны поля будет действовать сила $F = qE$, где q — заряд, $E = \frac{U}{d}$ — напряженность поля конденсатора, U — разность потенциалов, d — зазор между обкладками конденсатора (рис. 28). Под действием силы F электрон приобретает ускорение a, равное $a = \frac{F}{m}$, и, двигаясь с этим ускорением, пройдет путь

$$\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}.$$

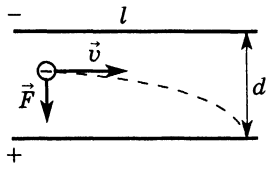


Рис. 28

Чтобы электрон не «упал» на нижнюю пластину конденсатора, время его полета t между обкладками должно быть $t \leqslant \frac{l}{v}$.

Учитывая это и второй закон Ньютона, получим:

$$\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{F}{m} \cdot \frac{l^2}{2v^2} = \frac{qEl^2}{2mv^2} = \frac{qUl^2}{2dmv^2},$$

отсюда

$$U = \frac{d^2mv^2}{ql^2}; \; U = \frac{1 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 22{,}75 \text{ (В)}.$$

30. Батарею из двух конденсаторов емкостью 400 и 500 пФ соединили последовательно и включили в сеть с напряжением 220 В. Потом батарею отключили от сети, конденсаторы разъединили и соединили параллельно обкладками, имеющими одноименные заряды. Каким будет напряжение на зажимах полученной батареи?

Дано: $U_1 = 220$ В; $C_1 = 400$ пФ; $C_2 = 500$ пФ.

Найти: U_2.

Решение. У последовательно соединенных конденсаторов заряды на обкладках равны по модулю $Q_1 = Q_2 = Q$ и заряд батареи равен заряду одного конденсатора. Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов определяется по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

Для батареи из двух конденсаторов

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2},$$

а их заряд

$$Q = CU_1 = \frac{C_1C_2U_1}{C_1 + C_2}. \qquad (1)$$

При отключении конденсаторов их заряд сохраняется. У параллельно соединенных конденсаторов заряд батареи равен сумме зарядов конденсаторов $Q' = Q_1 + Q_2$, а емкость — сумме емкостей $C' = C_1 + C_2$.

Напряжение на зажимах батареи из двух параллельно соединенных конденсаторов

$$U_2 = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{2Q}{C_1 + C_2}. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем

$$U_2 = \frac{2C_1C_2U_1}{(C_1 + C_2)^2}; \; U_2 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10^{-20} \cdot 220}{9^2 \cdot 10^{-20}} \simeq 108{,}6 \text{ (В)}.$$

31. Найти, как изменятся электроемкость и энергия плоского воздушного конденсатора, если параллельно его обкладкам ввести металлическую пластину толщиной 1 мм. Площадь обкладки конденсатора и пластины 150 см^2, расстояние между обкладками 6 мм. Конденсатор заряжен до 400 В и отключен от батареи.

Дано: $\varepsilon = 1$; $d_0 = 10^{-3}$ м; $S = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2; $d = 6 \cdot 10^{-3}$ м; $U = 400$ В.

Найти: ΔC, $\Delta W_э$.

Решение. Емкость и энергия конденсатора при внесении в него металлической пластины изменятся. Это вызвано тем, что при внесении металлической пластины уменьшается расстояние между пластинами от d до $(d - d_0)$ (рис. 29). Используем формулу электроемкости плоского конденсатора:

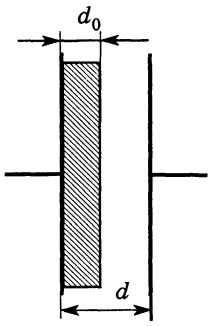


Рис. 29

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \qquad (1)$$

где S — площадь обкладки; d — расстояние между обкладками. В данном случае получим, что изменение электроемкости конденсатора равно:

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d - d_0} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S d_0}{d(d - d_0)}.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$\Delta C = \frac{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 4{,}43 \cdot 10^{-12}\ (\text{Ф}) = 4{,}43\ (\text{пФ}).$$

Так как электрическое поле в плоском конденсаторе однородно, плотность энергии во всех его точках одинакова и равна:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2, \qquad (2)$$

где E — напряженность поля между обкладками конденсатора. При внесении металлической пластины параллельно обкладкам напряженность поля осталась неизменной, а объем электрического поля уменьшился на

$$\Delta V = S(d - d_0) - Sd = -Sd_0.$$

Следовательно, изменение энергии (конечное значение ее меньше начального) произошло вследствие уменьшения объема поля конденсатора:

$$\Delta W_э = w\Delta V = -\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S d_0. \qquad (3)$$

Напряженность поля E определяется через градиент потенциала:

$$E = -\frac{U}{d}. \tag{4}$$

Формула (3) с учетом (4) принимает вид

$$\Delta W_э = \frac{-\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2d^2} S d_0. \tag{5}$$

Подставляя числовые значения в формулу (5), получаем

$$\Delta W_э = -\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 400^2}{2 \cdot 6^2 \cdot 10^{-6}} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \simeq$$
$$\simeq -2{,}95 \cdot 10^{-7}\ (\text{Дж}) = -295\ (\text{нДж}).$$

32. Расстояние между обкладками плоского воздушного конденсатора 4 мм. На помещенный между обкладками конденсатора заряд $Q = 4{,}9$ нКл действует сила $F = 98$ мкН. Площадь обкладки 100 см^2. Определить напряженность поля и разность потенциалов между обкладками, энергию поля конденсатора и объемную плотность энергии.

Дано: $F = 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н; $Q = 4{,}9 \cdot 10^{-9}$ Кл; $S = 10^{-2}$ м^2; $d = 4 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon = 1$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Найти: E, U, $W_э$, w.

Решение. Поле между обкладками конденсатора считаем однородным. Напряженность поля конденсатора определим из выражения:

$$E = \frac{F}{Q},$$

где F — сила, с которой поле действует на заряд Q, помещенный между обкладками конденсатора.

Подставив числовые значения, найдем

$$E = \frac{9{,}8 \cdot 10^{-5}}{4{,}9 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^4 = 20\ (\text{кВ/м}).$$

Разность потенциалов между обкладками $U = Ed$. Подставив числовые значения, получим:

$$U = 2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 80\ (\text{В}).$$

Энергия поля конденсатора

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}.$$

Подставим числовые значения:

$$W_э = \frac{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 80^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 7{,}08 \cdot 10^{-8}\ (\text{Дж}) = 70{,}8\ (\text{нДж}).$$

Плотность энергии

$$w = \frac{W_э}{V} = \frac{W_э}{Sd},$$

где $V = Sd$ — объем поля конденсатора;

$$w = \frac{7{,}08 \cdot 10^{-8}}{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 1{,}77 \cdot 10^{-3}\ (\text{Дж/м}^3).$$

33. Заряд конденсатора 1 мкКл, площадь пластин 100 см^2, зазор между пластинками заполнен слюдой. Определить объемную плотность энергии поля конденсатора и силу притяжения пластин.

Дано: $Q = 10^{-6}$ Кл; $S = 10^{-2}$ м^2; $\varepsilon = 6$.

Найти: w, F.

Решение. Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора равна:

$$F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}, \qquad (1)$$

где E — напряженность поля конденсатора; S — площадь обкладок конденсатора.

Напряженность однородного поля плоского конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \qquad (2)$$

где $\sigma = \frac{Q}{S}$ — поверхностная плотность заряда.

Подставляя (2) в (1), рассчитаем F:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S};$$

$$F = \frac{10^{-12}}{2 \cdot 6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \simeq 0{,}94\ (\text{Н}).$$

Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получим:

$$w = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S^2};$$

$$w = \frac{10^{-12}}{2 \cdot 6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}} \simeq 94{,}2\ (\text{Дж/м}^3).$$

34. К одной из обкладок плоского конденсатора прилегает стеклянная плоскопараллельная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной 9 мм. После того как конденсатор отключили от источника напряжением 220 В и вынули стеклянную пластинку, между обкладками установилась разность потенциалов 976 В. Определить расстояние между обкладками и отношение конечной и начальной энергии конденсатора.

Дано: $U_1 = 220$ В; $U_2 = 976$ В; $d = 9 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon_1 = 7$; $\varepsilon_2 = 1$.

Найти: d_0, W_2/W_1.

Решение. После отключения конденсатора и удаления стеклянной пластинки заряд на его обкладках остается неизменным, т. е. выполняется равенство

$$C_1 U_1 = C_2 U_2, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 — электроемкости конденсатора в начальном и конечном случае.

По условию задачи конденсатор вначале является слоистым и его электроемкость определяется по формуле

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_0 - d_1}{\varepsilon_2}}, \tag{2}$$

где S — площадь обкладок; d_0 — зазор между ними, d_1 — толщина стеклянной пластинки; ε_1 и ε_2 — диэлектрические проницаемости стекла и воздуха соответственно.

После удаления стеклянной пластинки электроемкость конденсатора

$$C_2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d_0}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\frac{\varepsilon_0 S U_1}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_0 - d_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S U_2}{d_0},$$

откуда

$$d_0 = \frac{U_2 d_1}{U_2 - U_1}\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right);$$

$$d_0 = \frac{976 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{(976 - 220)}\left(1 - \frac{1}{7}\right) \simeq 10^{-2}\ (\text{м}).$$

Начальная и конечная энергии конденсатора

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2}, \; W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

Тогда отношение этих энергий $\frac{W_2}{W_1} = \frac{C_2 U_2^2}{C_1 U_1^2}$. С учетом (1) получим:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{U_2}{U_1}; \frac{W_2}{W_1} = \frac{976(\text{В})}{220(\text{В})} \simeq 4{,}44.$$

35. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов 300 В. Площадь пластин 10 см^2, напряженность поля в зазоре между ними 300 кВ/м. Определить поверхностную плотность заряда на пластинах, емкость и энергию конденсатора.

Дано: $U = 300$ В; $S = 10^{-3}$ м^2; $E = 3 \cdot 10^5$ В/м.

Найти: σ, C, W.

Решение. Напряженность E поля в зазоре между обкладками конденсатора

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \text{ и } E = \frac{U}{d}.$$

Отсюда

$$d = \frac{U}{E}, \sigma = E\varepsilon\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \simeq 2{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

Емкость C конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE}{U};$$

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^5}{300} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф)}.$$

Энергия W конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2}; W = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^4}{2} \simeq 4 \cdot 10^{-7} \text{ (Дж)}.$$

36. Найти объемную плотность энергии электрического поля, создаваемого заряженной металлической сферой радиусом 5 см на расстоянии 5 см от ее поверхности, если поверхностная плотность заряда на ней $2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

Дано: $R = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $r = 5 \cdot 10^{-2}$ м; $\sigma = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

Найти: w.

Решение. Напряженность поля E, создаваемого заряженной сферой с поверхностной плотностью заряда σ и радиусом R, на расстоянии $R + r$ от центра сферы определяется по формуле

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R+r)^2} = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R+r)^2},$$

где $S = 4\pi R^2$ — площадь сферы.

Объемная плотность энергии w определяется по формуле

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \sigma^2 \cdot (4\pi)^2 \cdot R^4}{2 \cdot (4\pi)^2 \cdot (\varepsilon\varepsilon_0)^2 \cdot (R+r)^4};$$

$$w = \frac{4 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}05^4}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1^4} \simeq 0{,}014 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

37. Площадь пластин плоского слюдяного конденсатора 1,1 см^2, зазор между ними 3 мм. При разряде конденсатора выделилась энергия 1 мкДж. До какой разности потенциалов был заряжен конденсатор?

Дано: $\varepsilon = 6$; $S = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ м^2; $d = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $W = 10^{-6}$ Дж.

Найти: U.

Решение. Энергия поля конденсатора W, выделяемая при его разрядке, равна

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

где $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость плоского конденсатора. Отсюда

$$U = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{2Wd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}};$$

$$U = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-4}}} \simeq 1014 \text{ (В)}.$$

38. Энергия плоского воздушного конденсатора 0,4 нДж, разность потенциалов на обкладках 60 В, площадь пластин 1 см^2. Определить расстояние между обкладками, напряженность и объемную плотность энергии поля конденсатора.

Дано: $W = 4 \cdot 10^{-10}$ Дж; $U = 60$ В; $S = 10^{-4}$ м^2.

Найти: d, E, w.

Решение. Энергия конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$, где $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость плоского конденсатора.

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d},$$

откуда

$$d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2W};$$

$$d = \frac{1 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4} \cdot 60^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-10}} \simeq 0{,}004 \text{ (м)}.$$

Напряженность E поля равна

$$E = \frac{U}{d};$$

$$E = \frac{60}{0{,}004} = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ (В/м)}.$$

Объемная плотность w энергии рассчитаем следующим образом:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd};$$

$$w = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 10^{-3} \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

39. Под действием силы притяжения 1 мН диэлектрик между обкладками конденсатора находится под давлением 1 Па. Определить энергию, объемную плотность энергии поля конденсатора, если расстояние между обкладками 1 мм.

Дано: $F = 10^{-3}$ Н; $p = 1$ Па; $d = 10^{-3}$ м.

Найти: W, w.

Решение. Известно, что давление $p = \frac{F}{S}$, где F — сила, S — площадь. Сила F, с которой притягиваются обкладки конденсатора

$$F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2},$$

где

$$E = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}.$$

Энергия

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Учитывая, что и $U = Ed$ — напряжение на обкладках, а $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, получим:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{E^2 d^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S \cdot 2F \cdot d^2}{d \cdot 2 \cdot \varepsilon\varepsilon_0 S} = Fd;$$

$$W = 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6} \text{ (Дж)}.$$

Объемная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sd} = \frac{Fd}{Sd} = p = 1 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

2. Постоянный электрический ток

40. Плотность тока в никелиновом проводнике длиной 25 м равна 1 МА/м^2. Определить напряжение на концах проводника.

Дано: $l = 25$ м; $j = 10^6$ А/м^2; $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

Найти: U.

Решение. По закону Ома в дифференциальной форме плотность тока j в проводнике пропорциональна напряженности E поля в проводнике $j = \gamma E$, где $\gamma = \frac{1}{\rho}$ — удельная проводимость.

С другой стороны,

$$E = \frac{U}{l},$$

где U — напряжение на концах проводника длиной l.

Тогда $$j = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{\rho l},$$

откуда $$U = j\rho l;$$

$$U = 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 25 = 10 \text{ (В)}.$$

41. Определить плотность тока в нихромовом проводнике длиной 5 м, если на концах его поддерживается разность потенциалов 2 В.

Дано: $l = 5$ м; $U = 2$ В; $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м.

Найти: j.

Решение. По закону Ома в дифференциальной форме плотность тока $j = \gamma E$, где $\gamma = \frac{1}{\rho}$ — удельная проводимость, ρ — удельное сопротивление проводника, $E = \frac{U}{l}$ — напряженность поля в проводнике, где U — напряжение на концах проводника длиной l.

Тогда $$j = \gamma E = \frac{1}{\rho}\frac{U}{l};$$

$$j = \frac{2}{1{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 5} = 3{,}6 \cdot 10^5 \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

42. Напряжение на концах проводника сопротивлением 5 Ом за 0,5 с равномерно возрастает от 0 до 20 В. Какой заряд проходит через проводник за это время?

Дано: $R = 5$ Ом; $t = 0{,}5$ с; $U_1 = 0$; $U_2 = 20$ В.

Найти: q.

Решение. За время dt по проводнику переносится заряд

$$dq = Idt,$$

где $I = \frac{U(t)}{R}$ — ток в проводнике, R — сопротивление проводника; $U(t)$ — напряжение на концах проводника. Напряжение U линейно изменяется со временем, т. е. можно записать $U(t) = kt$, где $k = \frac{\Delta U}{\Delta t}$ — коэффициент пропорциональности,

$k = \frac{20 - 0}{0{,}5} = 40$ (В/с).

Заряд q, перенесенный по проводнику за 0,5 с, будет

$$q = \int_0^{0,5} dq = \int_0^{0,5} Idt = \int_0^{0,5} \frac{U(t)}{R}\,dt = \int_0^{0,5} \frac{k}{R}\,tdt = \frac{k}{R}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{0,5};$$

$$q = \frac{40 \cdot 0{,}5^2}{2 \cdot 5} = 1 \text{ (Кл)}.$$

43. Температура вольфрамовой нити электролампы 2000 °С, диаметр 0,02 мм, сила тока в ней 4 А. Определить напряженность поля в нити.

Дано: $t = 2000$ °С; $d = 2 \cdot 10^{-5}$ м; $I = 4$ А; $\rho_0 = 5{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ом · м; $\alpha = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Найти: E.

Решение. По определению плотность тока

$$j = \frac{I}{S},$$

где I — сила тока, S — поперечное сечение нити, $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

По закону Ома в дифференциальной форме плотность тока

$$j = \gamma E = \frac{E}{\rho},$$

где E — напряженность поля в нити, ρ — удельное сопротивление, $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, ρ_0 — удельное сопротивление вольфрама при $t = 0$ °С, α — температурный коэффициент сопротивления. Из уравнения

$$j = \frac{E}{\rho};\ E = j\rho = \frac{I}{S}\rho_0(1 + \alpha t) = \frac{I\rho_0(1 + \alpha t) \cdot 4}{\pi d^2};$$

$$j = \frac{4 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-8}(1 + 5{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3) \cdot 4}{3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-10}} \simeq 8000 \text{ (В/м)}.$$

44. На концах никелинового проводника длиной 5 м поддерживается разность потенциалов 12 В. Определить плотность тока в проводнике, если его температура 540 °С.

Дано: $l = 5$ м; $U = 12$ В; $t = 540$ °С; $\rho_0 = 4 \cdot 10^{-7}$ Ом · м; $\alpha = 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Найти: j.

Решение. По закону Ома в дифференциальной форме плотность тока $j = \gamma E = \frac{E}{\rho}$. Учитывая, что

$$E = \frac{U}{l};\ \rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

получим:

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{l}\frac{1}{\rho_0(1 + \alpha t)};$$

$$j = \frac{12}{5 \cdot 4 \cdot 10^{-7}(1 + 10^{-4} \cdot 540)} \simeq 5{,}7 \cdot 10^6\ (\text{А/м}^2).$$

45. Внутреннее сопротивление аккумулятора 1 Ом. При силе тока 2 А его КПД равен 0,8. Определить ЭДС аккумулятора.

Дано: $r = 1$ Ом; $I = 2$ А; $\eta = 0{,}8$.

Найти: E.

Решение. КПД источника тока $\eta = \frac{R}{R + r}$.

Отсюда

$$R = \frac{\eta \cdot r}{1 - \eta}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Выражая $\mathcal{E}$, получим:

$$\mathcal{E} = I(R + r) = I\left(\frac{\eta \cdot r}{1 - \eta} + r\right) = \frac{Ir}{1 - \eta};\ \mathcal{E} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 0{,}8} = 10\ (\text{В}).$$

46. Определить ЭДС аккумуляторной батареи, ток замыкания в которой 10 А, если при подключении к ней резистора сопротивлением 9 Ом сила тока в цепи равна 1 А.

Дано: $I_{кз} = 10$ А; $R = 9$ Ом; $I = 1$ А.

Найти: $\mathcal{E}$.

Решение. По закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \text{ и } \mathcal{E} = I(R + r).$$

При коротком замыкании цепи внешнее сопротивление $R = 0$ и $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$, откуда

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_{кз}}.$$

Тогда

$$\mathcal{E} = I\left(R + \frac{\mathcal{E}}{I_{кз}}\right)$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{IR}{1 - I/I_{кз}}; \mathcal{E} = \frac{9 \cdot 1}{1 - 0{,}1} = 10 \text{ (В)}.$$

47. ЭДС аккумулятора автомобиля 12 В. При силе тока 3 А его КПД равен 0,8. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора.

Дано: $\mathcal{E} = 12$ В; $I = 3$ А; $\eta = 0{,}8$.

Найти: r.

Решение. КПД $\eta = \frac{R}{R + r}$, откуда

$$R = \frac{\eta \cdot r}{1 - \eta}.$$

Из закона Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

выразим $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = I(R + r) = I\left(\frac{\eta \cdot r}{1 - \eta} + r\right) = \frac{Ir}{1 - \eta}.$$

Тогда

$$r = \frac{\mathcal{E}(1 - \eta)}{I}; r = \frac{12 \cdot 0{,}2}{3} = 0{,}8 \text{ (Ом)}.$$

48. К источнику тока подключают один раз резистор сопротивлением 1 Ом, другой раз — 4 Ом. В обоих случаях на резисторах за одно и то же время выделяется одинаковое количество теплоты. Определить внутреннее сопротивление источника тока.

Дано: $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $t_1 = t_2 = t$, $Q_1 = Q_2$.

Найти: r.

Решение. По закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}.$$

По закону Джоуля—Ленца количество теплоты Q, выделяемое в проводнике при прохождении тока за время t, равно:

$$Q = I^2Rt.$$

Так как $$Q_1 = Q_2,$$

то $$I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t,$$

тогда $$\frac{\mathcal{E}^2}{(R_1 + r)^2} R_1 t = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_2 + r)^2} R_2 t;$$

$$\frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2};$$

$$R_2(R_1 + r)^2 = R_1(R_2 + r)^2;$$

$$4(1 + r)^2 = 1 \cdot (4 + r)^2;$$

$$4 + 8r + 4r^2 = 16 + 8r + r^2;$$

$$3r^2 = 12;$$

$$r^2 = 4;\ r = 2\ (\text{Ом}).$$

49. Два одинаковых источника тока соединены в одном случае последовательно, в другом — параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление 1 Ом. При каком внутреннем сопротивлении источника сила тока во внешней цепи будет в обоих случаях одинаковой?

Дано: $R = 1$ Ом; $I_1 = I_2$; $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$; $r_1 = r_2$.

Найти: r.

Решение. По закону Ома

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + r_1},\ I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + r_2}.$$

При последовательном соединении (рис. 30, *а*) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, а внутреннее сопротивление $r = 2r_1$.

При параллельном соединении (рис. 30, *б*) внутреннее сопротивление источников r' определяется по формуле

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1},$$

откуда $r' = 0{,}5r_1$.

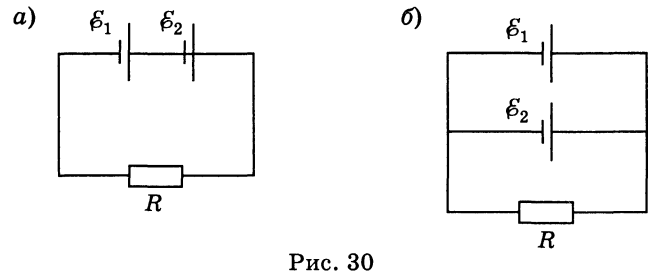


Рис. 30

Из условия $I_1 = I_2$ получим

$$\frac{2\mathcal{E}}{R + 2r_1} = \frac{\mathcal{E}}{R + 0{,}5r_1};$$

$$(R + 2r_1) = 2(R + 0{,}5r_1);\ R + 2r_1 = 2R + r_1.$$

Отсюда $R = r_1 = 1$ Ом.

50. В медном проводнике сечением 6 мм^2 и длиной 5 м течет ток. За 1 мин в проводнике выделяется 18 Дж теплоты. Определить напряженность поля, плотность и силу электрического тока в проводнике.

Дано: $S = 6 \cdot 10^{-6}$ м^2; $l = 5$ м; $t = 60$ с; $Q = 18$ Дж; $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Найти: E, j, I.

Решение. Для решения задачи используем законы Ома и Джоуля—Ленца. Закон Ома в дифференциальной форме имеет вид

$$j = \gamma E, \tag{1}$$

а закон Джоуля—Ленца

$$Q = I^2 Rt. \tag{2}$$

Сопротивление равно:

$$R = \frac{\rho l}{S}. \tag{3}$$

Силу тока I находим из (2) с учетом (3):

$$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \sqrt{\frac{QS}{\rho lt}};\ I = \sqrt{\frac{18 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 60}} \simeq 4{,}6\ (\text{А}).$$

По определению плотность тока равна $j = \frac{I}{S}$;

$$j = \frac{4{,}6}{6 \cdot 10^{-6}} \simeq 7{,}7 \cdot 10^5\ (\text{А/м}^2).$$

Напряженность поля в проводнике определим из (1), учитывая, что $\gamma = \frac{1}{\rho}$: $E = j\rho$; $E = 7{,}7 \cdot 10^5 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \simeq 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ (В/м).

51. Внутреннее сопротивление аккумулятора 2 Ом. При замыкании его одним резистором сила тока равна 4 А, при замыкании другим — 2 А. Во внешней цепи в обоих случаях выделяется одинаковая мощность. Определить ЭДС аккумулятора и внешние сопротивления.

Дано: $r = 2$ Ом; $I_1 = 4$ А; $I_2 = 2$ А; $N_1 = N_2$.

Найти: $\mathcal{E}$, R_1, R_2.

Решение. Закон Ома для замкнутой (полной) цепи имеет вид

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r},\ I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}. \quad (1)$$

Уравнения (1) представим в виде

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r),\ \mathcal{E} = I_2(R_2 + r). \quad (2)$$

Из равенств (2) следует

$$I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r). \quad (3)$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи в первом и втором случаях, $N_1 = I_1^2 R_1$, $N_2 = I_2^2 R_2$.

Из условия равенства мощностей следует:

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), получаем

$$R_1 = \frac{I_2 r}{I_1};\ R_2 = \frac{I_1 r}{I_2}. \quad (5)$$

Таким образом: $R_1 = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$ (Ом); $R_2 = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ (Ом).

Подставляя (5) в (2), получаем

$$\mathcal{E} = I_1 r\left(\frac{I_2}{I_1} + 1\right);\ \mathcal{E} = 4 \cdot 2\left(\frac{2}{4} + 1\right) = 12\ (\text{В}).$$

52. Сила тока в резисторе линейно возрастает за 4 с от 0 до 8 А. Сопротивление резистора 10 Ом. Определить количество теплоты, выделившееся в резисторе за первые 3 с.

Дано: $t_0 = 0$; $t_1 = 4$ с; $I = 0$; $I_1 = 8$ А; $t_2 = 3$ с; $R = 10$ Ом.

Найти: Q.

Решение. По закону Джоуля—Ленца

$$dQ = I^2 R dt.$$

Так как сила тока является функцией времени, то

$$I = kt,$$

где k — коэффициент пропорциональности, численно равный приращению тока в единицу времени: $k = \frac{\Delta I}{(t_1 - t_0)} = \frac{8}{4} = 2$ (А/с).

Следовательно,

$$dQ = k^2 t^2 R dt.$$

За первые 3 с выделится количество теплоты, равное

$$Q = \int_{t_0}^{t_2} k^2 t^2 R dt = k^2 R \int_{t_0}^{t_2} t^2 dt = \frac{k^2 R}{3}(t_2^3 - t_0^3).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$Q = \frac{4 \cdot 100 \cdot 27}{3} = 360 \text{ (Дж)}.$$

53. Батарея состоит из пяти последовательно соединенных элементов. ЭДС каждого 1,4 В, внутреннее сопротивление 0,3 Ом. При каком токе полезная мощность батареи равна 8 Вт? Определить наибольшую полезную мощность батареи.

Дано: $\mathcal{E}_i = 1{,}4$ В; $r_i = 0{,}3$ Ом; $P_\text{п} = 8$ Вт; $n = 5$.

Найти: I, $P_{\text{п max}}$.

Решение. Полезная мощность батареи

$$P_\text{п} = I^2 R. \tag{1}$$

Сила тока определяется по закону Ома:

$$I = \frac{n\mathcal{E}_i}{nr_i + R}. \tag{2}$$

Здесь $n \cdot \mathcal{E}_i$ — ЭДС, а $n \cdot r_i$ — внутреннее сопротивление n последовательно соединенных элементов.

Выразим R из (1):

$$R = \frac{P_\text{п}}{I^2}$$

и, подставив это выражение в (2), получим

$$I = \frac{n\mathcal{E}_i}{nr_i + \dfrac{P_\text{п}}{I^2}} \tag{3}$$

или

$$I\left(nr_i + \frac{P_\text{п}}{I^2}\right) = n\mathcal{E}_i. \tag{4}$$

Преобразуя выражение (4), получим квадратное уравнение относительно I:

$$nr_i I^2 - n\mathcal{E}_i I + P_\text{п} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем:

$$I_{1,2} = \frac{n\mathcal{E} \pm \sqrt{n^2\mathcal{E}_i^2 - 4nr_i P_\text{п}}}{2nr_i}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$I_1 = \frac{5 \cdot 1{,}4 + \sqrt{5^2 \cdot 1{,}4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0{,}3 \cdot 8}}{2 \cdot 5 \cdot 0{,}3} \simeq 2{,}7 \text{ (А)};$$

$$I_2 = \frac{5 \cdot 1{,}4 - \sqrt{5^2 \cdot 1{,}4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0{,}3 \cdot 8}}{2 \cdot 5 \cdot 0{,}3} = 2 \text{ (А)}.$$

Для того чтобы определить наибольшую полезную мощность батареи, найдем зависимость ее от внешнего сопротивления. Подставим в уравнение (1) выражение (2):

$$P_{\text{п}} = \frac{n^2 \mathcal{E}_i^2 R}{(nr_i + R)^2}. \qquad (5)$$

Из этой формулы следует, что при постоянных величинах $\mathcal{E}_i$ и r_i мощность является функцией одной переменной — внешнего сопротивления R. Известно, что эта функция имеет максимум, если $\frac{dP_{\text{п}}}{dR} = 0$, следовательно, имеем

$$\frac{dP_{\text{п}}}{dR} = \frac{n^2 \mathcal{E}_i^2 (R + nr_i) - 2n^2 \mathcal{E}_i^2 R}{(R + nr_i)^3} = 0,$$

или

$$n^2 \mathcal{E}_i^2 (R + nr_i) - 2n^2 \mathcal{E}_i^2 R = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию сопротивления внешней цепи. Из решения уравнения (6) следует, что $R = nr_i$. Подставляя найденное значение R в формулу (5), имеем

$$P_{\text{п max}} = \frac{n^2 \mathcal{E}_i^2}{4r_i}.$$

Производя вычисления, найдем

$$P_{\text{п max}} = \frac{5 \cdot 1{,}4^2}{4 \cdot 0{,}3} = 8{,}17 \text{ (Вт)}.$$

3. Магнитное поле. Индукция и напряженность магнитного поля

54. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии 50 см друг от друга, в одном направлении текут токи I_1 и I_2 силой по 5 А. Между проводниками на расстоянии 30 см от первого расположен кольцевой проводник, сила тока I_3 в котором равна 5 А (рис. 31). Радиус кольца 20 см. Определить индукцию и напряженность магнитного поля, создаваемого токами в центре кольцевого проводника.

Дано: $I_1 = I_2 = I_3 = I = 5$ А; $r_1 = 0{,}3$ м; $r_2 = 0{,}2$ м; $r_3 = 0{,}2$ м.

Найти: B, H.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции индукция результирующего магнитного поля в точке A равна:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3, \qquad (1)$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — индукции полей, создаваемых соответственно токами I_1 и I_2, направленными за плоскость рисунка; $\vec{B}_3$ — индукция поля, создаваемая кольцевым током. Как видно из рис. 31, векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены по одной прямой в противоположные стороны, поэтому их сумма $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_{12}$ равна модулю

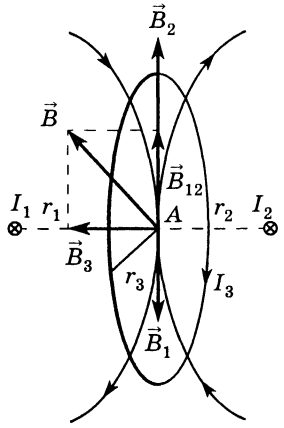


Рис. 31

$$B_{12} = B_2 - B_1. \qquad (2)$$

Индукция поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током,

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_2}, \qquad (3)$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды (для воздуха $\mu = 1$); r_1, r_2 — расстояния от проводников до центра кольца. Подставляя (3) в (2), получаем:

$$B_{12} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi} \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}. \qquad (4)$$

Индукция поля, создаваемого кольцевым проводником с током,

$$B_3 = \frac{\mu\mu_0 I}{2r_3}, \qquad (5)$$

где r_3 — радиус кольца.

Как видно из рис. 31, векторы $\vec{B}_{12}$ и $\vec{B}_3$ взаимно перпендикулярны, поэтому $B = \sqrt{B_{12}^2 + B_2^2}$ или, с учетом выражений (4) и (5),

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2} \sqrt{\frac{(r_1 - r_2)^2}{\pi^2 r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}};$$

$$B = \frac{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2} \sqrt{\frac{(0{,}3 - 0{,}2)^2}{3{,}14^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}2^2} + \frac{1}{0{,}2^2}} \simeq$$

$$\simeq 158 \cdot 10^{-7}\ (\text{Тл}) = 15{,}8\ (\text{мкТл}).$$

Напряженность магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0};\ H = \frac{15{,}8 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7}} = 1{,}26\ (\text{А/м}).$$

55. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, находящимся на расстоянии 10 см друг от друга, текут токи силой 5 А в каждом. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого токами в точке, лежащей посередине между проводниками в случаях, когда: 1) проводники параллельны и токи текут в одном направлении (рис. 32, *а*); проводники перпендикулярны, направления токов показаны на рис. 32, *б*.

Дано: $d = 0{,}1$ м; $I_1 = I_2 = I = 5$ А.

Найти: $B_{\parallel}$, $B_{\perp}$.

Решение. Результирующая индукция магнитного поля в данной точке равна векторной сумме индукций полей, создаваемых каждым током в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \qquad (1)$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ — индукции полей, создаваемых соответственно токами I_1 и I_2. Если токи текут по параллельным проводникам в одном направлении, то, применив правило правого винта, определяем направления $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Как видно из рис. 32, *а*, $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ направлены в противоположные стороны, поэтому векторная сумма (1) в данном случае может быть заменена алгебраической:

$$B_{\parallel} = (B_1 - B_2). \qquad (2)$$

Индукции полей, создаваемых бесконечно длинными проводниками, находим по формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1},\ B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}, \qquad (3)$$

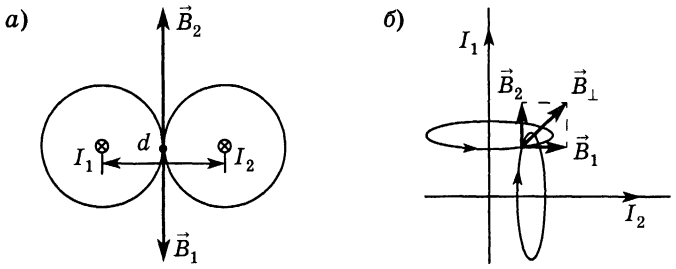


Рис. 32

где r_1 и r_2 — соответственно расстояния от проводников до точки, в которой определяется индукция магнитного поля. Согласно условию задачи $r_1 = r_2 = r$ и тогда

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0.$$

В случае, когда проводники перпендикулярны (рис. 32, *б*), результирующая индукция в точке, лежащей посередине между проводниками, равна:

$$B_{\perp} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \text{ или } B_{\perp} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sqrt{2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$B_{\perp} = \frac{10^{-7} \cdot 12{,}56 \cdot 5\sqrt{2}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \approx 28{,}28 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)} = 28{,}28 \text{ (мкТл)}.$$

56. Изолированный проводник изогнут в виде прямого угла со сторонами 20 см каждая. В плоскости угла помещен кольцевой проводник радиусом 10 см так, что стороны угла являются касательными к кольцу (рис. 33, *а*). Найти индукцию в центре кольца. Силы токов в проводнике равны 2 А. Влияние подводящих проводов не учитывать.

Дано: $l = 0{,}2$ м; $r_0 = 0{,}1$ м; $\beta_1 = \beta_2 = 45°$; $I_1 = I_2 = I = 2$ А.

Найти: B.

Решение. Индукция dB в точке поля от элемента проводника dl с током I (проводник имеет произвольную конфигурацию) определяется по закону Био—Савара—Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}, \qquad (1)$$

где r — модуль радиуса-вектора, проведенного из элемента в точку, где определяется индукция; α — угол, составленный векторами dl и r; μ_0 — магнитная постоянная.

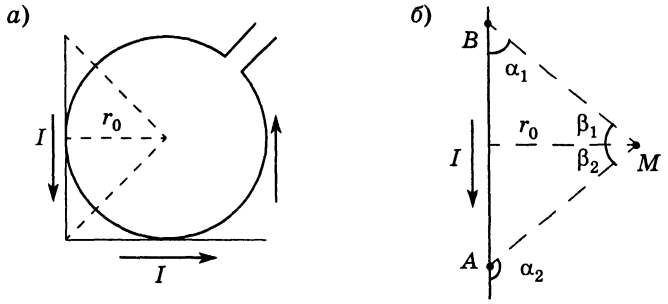


Рис. 33

Направление вектора индукции перпендикулярно плоскости, содержащей dl и r, и определяется правилом правого винта. Например, в точке окружности (рис. 33, *а*) векторы индукции от всех элементов перпендикулярны плоскости окружности и направлены на нас. Интегрируя выражение (1), получаем индукцию в центре окружности радиуса r_0:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r_0}. \qquad (2)$$

Индукция, создаваемая в точке M конечным отрезком AB прямого проводника на расстоянии r_0 от него (рис. 33, *б*), равна $B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$. Эту же формулу в некоторых случаях удобнее записать в виде

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\sin\beta_1 + \sin\beta_2). \qquad (3)$$

Вектор индукции в точке M перпендикулярен плоскости, в которой лежат проводник AB и r_0, и совпадает по направлению с B_1.

По условию задачи $\beta_1 = \beta_2 = 45°$, и индукция от каждой стороны угла составляет:

$$B_2 = B_3 = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi r_0 \cdot 2} + \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi r_0 \cdot 2} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi r_0}. \qquad (4)$$

Так как направления векторов индукции полей, создаваемых проводниками, совпадают, то результирующая индукция в центре кольца равна сумме

$$B = B_1 + 2B_3, \text{ или } B = B_1 + 2B_3 = \frac{\mu_0 I}{2r_0}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right);$$

$$B = \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot 0{,}1}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3{,}14}\right) \simeq 18{,}22 \cdot 10^{-6}\ (\text{Тл}) = 18{,}22\ (\text{мкТл}).$$

57. Два бесконечно длинных прямых проводника, сила тока в которых 6 и 8 А, расположены перпендикулярно друг другу (рис. 34, *а*). Определить индукцию и напряженность магнитного поля на середине кратчайшего расстояния между проводниками, равного 2 см.

Дано: $I_1 = 6$ А; $I_2 = 8$ А; $d = 0{,}02$ м.

Найти: H, B.

Решение. Из рис. 34, *б* видно, что направление векторов взаимно перпендикулярно ($\alpha = 90°$), следовательно, $H^2 = H_1^2 + H_2^2$. Напряженность магнитного поля H, созданного беско-

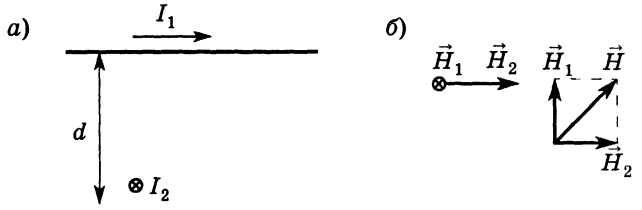


Рис. 34

нечно длинным проводником с током на расстоянии r от него определяется по формуле

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

По условию задачи $r = \frac{d}{2}$, следовательно,

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{\frac{I_1^2}{(2\pi r)^2} + \frac{I_2^2}{(2\pi r)^2}} = \frac{1}{2\pi\frac{d}{2}}\sqrt{I_1^2 + I_2^2};$$

$$H = \frac{\sqrt{36 + 64}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01} \simeq 159 \text{ (А/м)}.$$

Индукция B и напряженность H связаны соотношением

$$B = \mu\mu_0 H.$$

$$B = 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 159 \simeq 2 \cdot 10^{-4} \text{ (Тл)}.$$

58. По двум бесконечно длинным прямым проводникам, расстояние между которыми 15 см, в одном направлении текут токи 4 и 6 А. Определить расстояние от проводника с меньшей силой тока до геометрического места точек, в котором напряженность магнитного поля равна нулю.

Дано: $I_1 = 4$ А; $I_2 = 6$ А; $l = 0{,}15$ м, $H_1 = H_2$.

Найти: r.

Решение. Точка, где $H_1 = H_2$, расположена на прямой, соединяющей проводники с током (рис. 35). Напряженность H поля, создаваемого прямым бесконечным проводником с током I на расстоянии R от него, определяется по формуле:

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

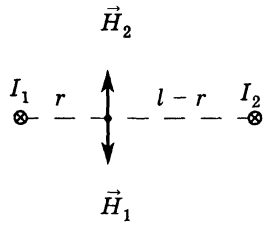


Рис. 35

Тогда $H = \frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_2}{2\pi(l-r)}$; $I_1(l-r) = I_2 r$; $(I_2 + I_1)r = I_1 l$;

$$r = \frac{I_1 l}{I_2 + I_1};\ r = \frac{4 \cdot 0{,}15}{10} = 0{,}06\ (\text{м}).$$

59. По двум бесконечно длинным прямым проводникам, расстояние между которыми 15 см, в противоположных направлениях текут токи 4 и 6 А. Определить расстояние от проводника с меньшей силой тока до геометрического места точек, в котором напряженность магнитного поля равна нулю.

Дано: $I_1 = 4$ А; $I_2 = 6$ А; $l = 0{,}15$ м; $H_1 = H_2$.
Найти: r.

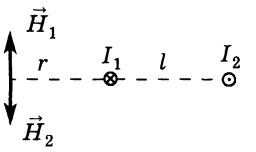


Рис. 36

Решение. Из рис. 36 видно, что точка, где $H_1 = H_2$, расположена на продолжении прямой, соединяющей проводники с током. Напряженность H поля, создаваемого прямым бесконечным проводником с током I на расстоянии R от него, определяется по формуле:

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Тогда $H_1 = H_2$; $\frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_2}{2\pi(r+l)}$; $I_1(r+l) = I_2 r$;

$$(I_2 - I_1)r = I_1 l;\ r = \frac{I_1 l}{I_2 - I_1};\ r = \frac{4 \cdot 0{,}15}{2} = 0{,}3\ (\text{м}).$$

60. В кольцевом проводнике радиусом 10 см сила тока 4 А. Параллельно плоскости проводника на расстоянии 2 см над его центром проходит бесконечно длинный проводник, сила тока в котором 2 А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в центре кольца. Рассмотреть все возможные случаи.

Дано: $I_1 = 4$ А; $I_2 = 2$ А; $R = 0{,}1$ м; $r = 0{,}02$ м.
Найти: H, B.

Решение. Как видно из рис. 37, в каждом из четырех случаев вектора H_1 поля кольцевого проводника и H_2 поля прямолинейного проводника взаимно перпендикулярны, а значение вектора H суммарного поля будет равно:

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \sqrt{\frac{I_1^2}{(2R)^2} + \frac{I_2^2}{(2\pi r)^2}};$$

$$H = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4^2}{1 \cdot 10^{-2}} + \frac{2^2}{3{,}14^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}} \simeq 25{,}6\ (\text{А/м}).$$

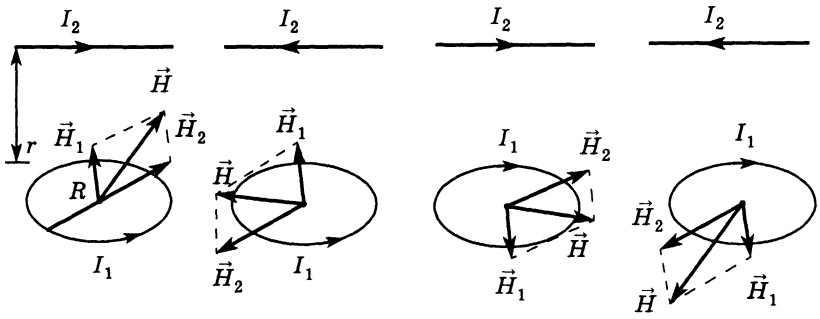


Рис. 37

Индукция поля B и напряженность H связаны соотношением

$$B = \mu\mu_0 H,$$

$$B = 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 25{,}6 \simeq 3{,}2 \cdot 10^{-5}\ (\text{Тл}).$$

61. Два круговых витка с током лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Радиус большего витка 12 см, а меньшего 2 см. Напряженность поля в центре витков равна 50 А/м, если токи текут в одном направлении, и равна нулю, если в противоположных. Определить силу тока в витках.

Дано: $r_1 = 0{,}12$ м; $r_2 = 0{,}02$ м; $H' = 50$ А/м; $H'' = 0$.

Найти: I_1, I_2.

Решение. Напряженность H магнитного поля, создаваемого кольцевым проводником радиуса r с током I, в центре кольца (рис. 38) определяется по формуле $H = \dfrac{I}{2r}$.

По условию $H' = \dfrac{I_1}{2r_1} + \dfrac{I_2}{2r_2}$; $H'' = \dfrac{I_1}{2r_1} - \dfrac{I_2}{2r_2}$.

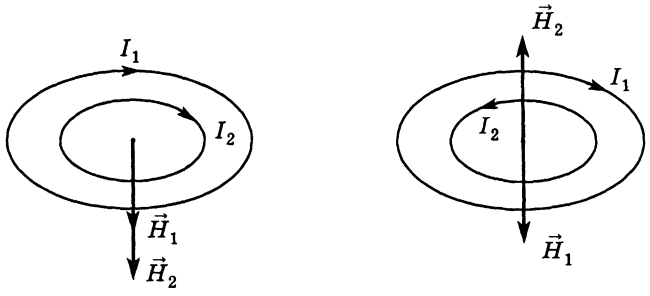


Рис. 38

Составляем систему уравнений и, решая их совместно, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{I_1}{2\cdot 0{,}12} + \dfrac{I_2}{2\cdot 0{,}02} = 50, \\ \dfrac{I_1}{2\cdot 0{,}12} - \dfrac{I_2}{2\cdot 0{,}02} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{I_1}{0{,}24} + \dfrac{I_2}{0{,}04} = 50, \\ \dfrac{I_1}{0{,}24} - \dfrac{I_2}{0{,}04} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + 6I_2 = 12, \\ I_1 - 6I_2 = 0, \end{cases}$$

$$I_1 = 6 \text{ А}; \; I_2 = 1 \text{ А}.$$

62. По квадратной рамке со стороной 0,2 м течет ток 4 А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в центре рамки.

Дано: $I = 4$ А; $\alpha = 0{,}2$ м.

Найти: H, B.

Решение. Магнитное поле в центре рамки (рис. 39) создается каждой из его сторон и направлено в одну сторону нормально к плоскости рамки. Следовательно,

$$H = 4 \cdot H_1,$$

где H_1 — напряженность поля, создаваемого отрезком проводника с током I длиной a, которая определяется по формуле

$$H = \frac{I}{4\pi r}(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где $r = \dfrac{a}{2}$ — расстояние от проводника до точки поля. По условию данной задачи $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 135°$.

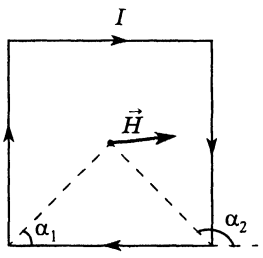


Рис. 39

Тогда $H = 4 \cdot \dfrac{I \cdot 2}{4\pi a}(\cos 45° - \cos 135°)$;

$$H = \frac{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot 2} \simeq 18 \text{ (А/м)}.$$

Индукция поля B и напряженность H связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$:

$$B = 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 18 \simeq$$

$$\simeq 2{,}26 \cdot 10^{-5} \text{ (Тл)}.$$

4. Законы электромагнетизма

63. Виток радиусом 5 см помещен в однородное магнитное поле напряженностью 5000 А/м так, что нормаль к витку составляет угол 60° с направлением поля. Сила тока в витке 1 А. Какую работу совершат силы поля при повороте витка в устойчивое положение?

Дано: $r = 0{,}05$ м; $I = 1$ А; $H = 5000$ А/м; $\alpha = 60°$.

Найти: A.

Решение. Работа A при повороте витка с током I в магнитном поле равна:

$$A = I\Delta\Phi. \qquad (1)$$

Здесь $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — изменение магнитного потока сквозь площадь витка $S = \pi r^2$; $\Phi_1 = BS\cos\alpha$ — магнитный поток, пронизывающий виток в начальном положении, где α — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{B}$.

Устойчивым положением витка в магнитном поле является такое, при котором направление нормали к нему совпадает с вектором индукции, т. е. $\cos\alpha = 1$. Следовательно,

$$\Phi_2 = BS.$$

Таким образом, $\Delta\Phi = B\pi r^2(1 - \cos\alpha)$.

Учитывая, что $B = \mu\mu_0 H$, имеем

$$\Delta\Phi = \mu\mu_0 H r^2(1 - \cos\alpha)\cdot\pi. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$A = I\mu\mu_0 H\pi r^2(1 - \cos\alpha);$$

$$A = 1\cdot 1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^3\cdot 3{,}14\cdot 25\cdot 10^{-4}(1 - 0{,}5) \simeq$$

$$\simeq 2{,}46\cdot 10^{-5}\ (\text{Дж}).$$

64. Пройдя ускоряющую разность потенциалов 3,52 кВ, электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Индукция поля 0,01 Тл, радиус траектории $r = 2$ см. Определить удельный заряд электрона.

Дано: $U = 3{,}52\cdot 10^3$ В; $B = 0{,}01$ Тл; $r = 2$ см.

Найти: e/m.

Решение. Удельным зарядом частицы называется величина, равная отношению заряда к массе, т. е. e/m.

В магнитном поле с индукцией B на заряд, движущийся со скоростью v перпендикулярно линиям индукции, действует сила Лоренца

$$F_Л = Bev.$$

Под действием этой силы заряд перемещается по дуге окружности. Так как при этом сила Лоренца вызывает центростремительное ускорение, то, согласно второму закону Ньютона, можно записать: $Bev = \frac{mv^2}{r}$.

Кинетическую энергию, равную $\frac{mv^2}{2}$, электрон приобретает за счет работы A сил электрического поля ($A = eU$), поэтому имеем:

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Преобразуя последние два соотношения и исключив из них скорость, получим формулу для определения удельного заряда электрона

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2r^2}.$$

Подставив исходные данные, находим:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot 3{,}52 \cdot 10^3}{10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\ (\text{Кл/кг}).$$

65. Виток радиусом 2 см, сила тока в котором 10 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией 1,5 Тл. Линии индукции перпендикулярны плоскости витка. Определить работу, совершаемую внешними силами при повороте витка на угол 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром витка. Считать, что при повороте витка сила тока в нем поддерживается неизменной.

Дано: $I = 10$ А; $B = 1{,}5$ Тл; $r = 0{,}02$ м; $\alpha = 90°$.

Найти: A.

Решение. На виток с током, помещенный в магнитное поле, действует вращающий момент

$$M = p_m B \sin \alpha, \qquad (1)$$

где $p_m = IS = I\pi r^2$ — магнитный момент витка; B — индукция магнитного поля, α — угол между векторами p_m и B.

В начальном положении, согласно условию задачи, виток свободно установился в магнитном поле, следовательно, векторы p_m и B совпадают по направлению, т. е. $\alpha = 0$, $M = 0$.

При действии внешних сил виток выходит из положения равновесия, при этом возникает момент сил, определяемый формулой (1). Момент сил стремится возвратить виток в исходное положение. При повороте витка внешние силы совер-

шают работу против этого момента, который является переменным и зависит от угла поворота α:

$$dA = Md\alpha \text{ или } dA = I\pi r^2 B\sin\alpha d\alpha.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу, совершаемую при повороте витка на конечный угол:

$$A = \int_0^{\pi/2} I\pi r^2 B\sin\alpha d\alpha = I\pi r^2 B\int_0^{\pi/2}\sin\alpha d\alpha =$$

$$= I\pi r^2 B\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = I\pi r^2 B.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$A = 10\cdot 3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}5 = 18{,}84\cdot 10^{-3}\text{ (Дж)} \simeq 0{,}02\text{ (Дж)}.$$

66. Квадратная рамка со стороной 4 см содержит 100 витков и помещена в однородное магнитное поле напряженностью 100 А/м. Направление поля составляет с нормалью к рамке угол 30°. Какая работа совершается при повороте рамки на 30° в одну и в другую сторону, если сила тока в ней 1 А?

Дано: $a = 0{,}04$ м; $N = 100$; $H = 100$ А/м; $\alpha_0 = 30°$; $I = 1$ А.

Найти: A_1, A_2.

Решение. При повороте рамки на 30° по часовой стрелке угол между $\vec{B}$ и $\vec{n}$ будет $\alpha_1 = 0$, т. е. рамка расположится перпендикулярно полю. При повороте рамки на 30° в другую сторону угол между $\vec{B}$ и $\vec{n}$ будет $\alpha_2 = 60°$.

Работа при повороте рамки

$$A = I\Delta\Phi N,$$

где I — сила тока; N — количество витков; $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0$ — изменение магнитного потока, пронизывающего плоскость рамки, $\Phi = BS\cos\alpha$, $S = a^2$ — площадь рамки, $B = \mu_0 H$ — индукция магнитного поля, H — напряженность.

$$\Phi_0 = BS\cos\alpha_0;\ \Phi_1 = BS\cos\alpha_1;\ \Phi_2 = BS\cos\alpha_2.$$

Тогда $A = I\mu_0 HSN(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$,

$$A_1 = I\mu_0 Ha^2 N(\cos 0° - \cos 30°);$$

$$A_1 = 1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 10^4\cdot 4^2\cdot 10^{-4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 2{,}7\cdot 10^{-6}\text{ (Дж)}.$$

$$A_2 = I\mu_0 Ha^2 N(\cos 60° - \cos 30°);$$

$$A_2 = 1\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 10^4\cdot 4^2\cdot 10^{-4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -7{,}4\cdot 10^{-6}\text{ (Дж)}.$$

67. Под действием однородного магнитного поля перпендикулярно линиям индукции начинает перемещаться прямой проводник массой 2 кг, сила тока в котором 10 А. Какой магнитный поток пересечет этот проводник к моменту времени, когда его скорость станет равна 31,6 м/с?

Дано: $I = 10$ А; $m = 2$ кг; $\upsilon = 31{,}6$ м/с.

Найти: $\Delta\Phi$.

Решение. Работа перемещения проводника с током I под действием магнитного поля равна $A = I\Delta\Phi$. Эта работа будет численно равна кинетической энергии, приобретаемой проводником:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}; A = E_к;$$

$$I\Delta\Phi = \frac{m\upsilon^2}{2}; \ \Delta\Phi = \frac{m\upsilon^2}{2I};$$

$$\Delta\Phi = \frac{2 \cdot 31{,}6^2}{2 \cdot 10} \simeq 98 \text{ (Вб)}.$$

68. Квадратная рамка со стороной 4 см содержит 100 витков и помещена в однородное магнитное поле напряженностью 100 А/м. Направление поля составляет угол 30° с нормалью к рамке. Какая работа совершается при повороте рамки в положение, когда ее плоскость совпадает с направлением линий индукции поля (рис. 40)?

Дано: $a = 0{,}04$ м; $N = 100$; $H = 100$ А/м; $\alpha_0 = 30°$; $I = 1$ А.

Найти: A.

Решение. Когда плоскость рамки совпадает с направлением поля, угол α_1 между $\vec{B}$ и $\vec{n}$ равен 90°. Работа A поворота рамки с током I равна

$$A = I\Delta\Phi N,$$

где $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0$ — изменение магнитного потока Φ, пронизывающего плоскость рамки, $\Phi = BS\cos\alpha$, где $B = \mu\mu_0 H$, $S = a^2$ — площадь рамки.

Поток Φ_0, пронизывающий рамку в исходном положении, будет $\Phi_0 = BS\cos\alpha$, а после поворота — $\Phi_1 = BS\cos\alpha_1$.

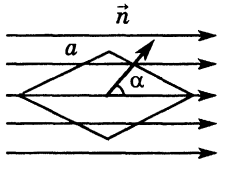


Рис. 40

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_0) = IBSN(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0) =$$

$$= I\mu_0 Ha^2 N(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0);$$

$$A = 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 10^2\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq$$

$$\simeq -1{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)}.$$

69. Проводник, сила тока в котором 1 А, длиной 0,3 м равномерно вращается вокруг оси, проходящей через его конец, в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля напряженностью 1 кА/м. За 1 мин вращения совершается работа 0,1 Дж. Определить угловую скорость вращения проводника.

Дано: $I = 1$ А; $l = 0{,}3$ м; $H = 10^3$ А/м; $t = 60$ с; $A = 0{,}1$ Дж.

Найти: ω.

Решение. Работа, совершаемая силами магнитного поля при перемещении проводника с током I, равна:

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi = BS$ — изменение магнитного потока, т. е. магнитный поток, пересекаемый проводником при его вращении.

$S = \pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} t$ — площадь, которую пересечет проводник при вращении с угловой скоростью ω за время t, l — длина проводника, $B = \mu_0 H$ — индукция, H — напряженность.

$$A = I\Delta\Phi = IBS = I\mu_0 H\pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} t.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2A}{H \cdot I\mu_0 l^2 t} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 0{,}09 \cdot 60} \simeq 29{,}5\ (\text{с}^{-1}).$$

70. На расстоянии 5 см параллельно прямолинейному длинному проводнику движется электрон с кинетической энергией 1 кэВ. Какая сила будет действовать на электрон, если по проводнику пустить ток 1 А?

Дано: $E = 10^3$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж; $I = 1$ А; $r = 0{,}05$ м.

Найти: F.

Решение. Электрон, обладающий кинетической энергией $E = \frac{mv^2}{2}$, движется со скоростью $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Прямолинейный проводник с током I создает магнитное поле, индукция которого B на расстоянии r от него определяется по формуле

$$B = \frac{I\mu_0}{2\pi r}.$$

На движущийся электрон со стороны поля действует сила Лоренца $F_Л = qvB$:

$$F_Л = q\sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{I\mu_0}{2\pi r};$$

$$F_Л = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7}\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-16}}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05\sqrt{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 1{,}2 \cdot 10^{-17}\ (\text{Н}).$$

71. Протон движется в магнитном поле напряженностью 10^5 А/м по окружности радиусом 2 см. Найти кинетическую энергию протона.

Дано: $H = 10^5$ А/м; $r = 0{,}02$ м.

Найти: E.

Решение. Кинетическая энергия определяется по формуле:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

На протон, движущийся в магнитном поле с индукцией $B = \mu\mu_0 H$ со скоростью v, действует сила Лоренца

$$F_л = qvB,$$

которая численно равна центростремительной силе $F_ц = \frac{mv^2}{r}$.

Из равенства $F_л = F_ц$ выразим v и подставим в формулу для E:

$$qvB = \frac{mv^2}{r};$$

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{q\mu\mu_0 Hr}{m};$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mq^2(\mu\mu_0 H)^2 r^2}{2m^2};$$

$$E = \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 12{,}56^2 \cdot 10^{-14} \cdot 0{,}02^2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \simeq$$

$$\simeq 4{,}8 \cdot 10^{-17} \text{ (Дж)} = 300 \text{ (эВ)}.$$

72. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 88 кВ, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям индукции. Индукция поля равна 0,01 Тл. Определить радиус траектории электрона.

Дано: $U = 88$ кВ; $B = 0{,}01$ Тл; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: r.

Решение. В магнитном поле с индукцией B на электрон, движущийся со скоростью v перпендикулярно B, действует сила Лоренца

$$F_л = evB, \qquad (1)$$

которая обусловливает центростремительное ускорение электрона при его движении по окружности:

$$evB = \frac{mv^2}{r}. \qquad (2)$$

Пройдя ускоряющую разность потенциалов U, электрон приобретает кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$, равную работе A сил электрического поля

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Отсюда находим скорость электрона:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) с учетом (3) найдем радиус траектории:

$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{e}};\ r = \frac{1}{10^{-2}}\sqrt{\frac{2 \cdot 88 \cdot 10^3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}} = 0{,}1\ (\text{м}).$$

73. Момент импульса протона в однородном магнитном поле напряженностью 20 кА/м равен $6{,}6 \cdot 10^{-23}$ кг $\cdot$ м^2/с. Найти кинетическую энергию протона, если он движется перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

Дано: $H = 2 \cdot 10^4$ А/м; $L = 6{,}6 \cdot 10^{-23}$ кг $\cdot$ м^2/с; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг; $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: E.

Решение. Кинетическая энергия равна $E = \frac{mv^2}{2}$. Протон движется по окружности радиуса r под действием силы Лоренца $F_Л = qvB$, которая численно равна центростремительной силе $F_ц = \frac{mv^2}{r}$, $F_Л = F_ц$, $\frac{mv^2}{r} = qvB$.

Домножив левую и правую части на $\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{qvBr}{2} = E.$$

Из уравнения для момента импульса

$$L = mvr$$

выразим

$$vr = \frac{L}{m}.$$

Подставляя vr в уравнение, получим:

$$E = \frac{qBL}{2m} = \frac{q\mu\mu_0 HL}{2m};$$

$$E = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-23}}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \simeq$$

$$\simeq 8 \cdot 10^{-17}\ (\text{Дж}) = 500\ (\text{эВ}).$$

74. Два параллельных бесконечно длинных проводника с токами 10 А взаимодействуют с силой 1мН на 1 м их длины. На каком расстоянии находятся проводники?

Дано: $I_1 = I_2 = 10$ А; $F = 10^{-3}$ Н; $l = 1$ м.

Найти: r.

Решение. Сила взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводников длиной l с токами I_1 и I_2 определяется по формуле

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}.$$

Отсюда

$$r = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi F};\ r = \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3}} = 0{,}02\ (\text{м}).$$

75. Найти радиус траектории протона в магнитном поле с индукцией 0,5 Тл, если он движется перпендикулярно вектору индукции и обладает кинетической энергией 3 МэВ.

Дано: $B = 0{,}5$ Тл; $E = 3$ МэВ; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Найти: r.

Решение. Кинетическая энергия протона $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, откуда его скорость $\upsilon = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Со стороны магнитного поля с индукцией B на движущийся со скоростью υ протон действует сила Лоренца $F_Л = q\upsilon B$, которая является центростремительной $F_ц = \frac{m\upsilon^2}{r}$. Приравнивая $F_Л = F_ц$, найдем радиус траектории r движения протона:

$$r = \frac{m\upsilon^2}{q\upsilon B} = \frac{1}{qB}\sqrt{\frac{2Em^2}{m}};\ r = \frac{\sqrt{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}5} = 0{,}5\ (\text{м}).$$

76. Электрон с энергией 300 эВ движется перпендикулярно линиям индукции магнитного поля напряженностью 465 А/м. Определить силу Лоренца, скорость и радиус траектории электрона.

Дано: $E = 300$ эВ $= 4{,}8 \cdot 10^{-17}$ Дж; $H = 465$ А/м; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: $F_Л$, υ, r.

Решение. Кинетическая энергия электрона равна:

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

откуда $$v = \sqrt{\frac{2E}{m}};$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-17}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 10^7 \text{ м/с}.$$

Сила Лоренца $F_Л = qvB$; $B = \mu\mu_0 H$;

$$F_Л = qv\mu\mu_0 H;$$

$$F_Л = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 465 = 9{,}3 \cdot 10^{-16} \text{ (Н)}.$$

В магнитном поле электрон движется по окружности радиусом r под действием центростремительной силы

$$F_ц = \frac{mv^2}{r},$$

численно равной силе Лоренца:

$$F_Л = F_ц, \text{ тогда } F_Л = \frac{mv^2}{r} \text{ и}$$

$$r = \frac{mv^2}{F_л}; \; r = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 10^{14}}{9{,}3 \cdot 10^{-16}} \simeq 0{,}1 \text{ (м)}.$$

5. Электромагнитная индукция. Самоиндукция. Энергия магнитного поля

77. Соленоид длиной 20 см и диаметром 4 см имеет плотную трехслойную обмотку из провода диаметром 0,1 мм. По обмотке соленоида течет ток 0,1 А. Зависимость $B = f(H)$ для материала сердечника дана на рис. 41. Определить напряженность и индукцию поля в соленоиде, магнитную проницаемость сердечника, индуктивность соленоида, энергию и объемную плотность энергии поля соленоида.

Дано: $l = 0{,}2$ м; $D = 0{,}04$ м; $k = 3$; $d = 10^{-4}$ м; $I = 0{,}1$ А.

Найти: H, B, μ, L, W, w.

Решение. Поле внутри соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля равна:

$$H = In,$$

где I — сила тока в обмотке, $n = \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{d} k = \frac{k}{d}$ — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида, k — число слоев обмотки, d — диаметр провода. Тогда

$$H = \frac{Ik}{d}; \; H = \frac{0{,}1 \cdot 3}{10^{-4}} = 3000 \text{ (А/м)}.$$

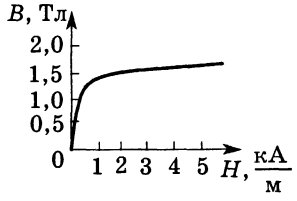


Рис. 41

По графику $B = f(H)$ (рис. 41) находим, что напряженности 3000 А/м соответствует индукция 1,7 Тл. Используя связь между индукцией и напряженностью, определим магнитную проницаемость:

$$B = \mu\mu_0 H,$$

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H};$$

$$\mu = \frac{1{,}7}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 3000} \simeq 451.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S,$$

где l — длина, $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения соленоида. С учетом того, что $n = \frac{k}{d}$, получаем:

$$L = \mu\mu_0 \frac{k^2}{d^2} l \frac{\pi D^2}{4};$$

$$L = \frac{451 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 3^2 \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-8}} \simeq 128 \text{ (Гн)}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{BH}{2};$$

$$w = \frac{1{,}7 \cdot 3000}{2} = 2{,}55 \cdot 10^3 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = wSl$$

или

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$W = 128 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 = 0{,}64 \text{ (Дж)}.$$

78. На соленоид (см. условие и решение задачи 77) надето изолированное кольцо того же диаметра. Определить ЭДС индукции в кольце и ЭДС самоиндукции в соленоиде, если за 0,01 с ток в его обмотке равномерно снижается до нуля.

Дано: $B = 1{,}7$ Тл; $D = 0{,}04$ м; $I_1 = 0{,}1$ А; $L = 128$ Гн; $\Delta t = 10^{-2}$ с; $I_2 = 0$.

Найти: $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_{si}$.

Решение. По условию задачи за время $\Delta t = 0{,}01$ с сила тока в обмотке соленоида равномерно уменьшается от 0,1 А до 0, поэтому магнитный поток, пронизывающий площадь кольца $S = \frac{\pi D^2}{4}$, уменьшается от $\Phi_1 = BS$ до $\Phi_2 = 0$. ЭДС индукции, возникающая в кольце,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Phi_1}{\Delta t} = \frac{B\pi D^2}{4\Delta t};$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} \simeq 0{,}21 \text{ (В)}.$$

ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$, возникающая в соленоиде при выключении тока в нем, $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}$. Так как при выключении сила тока уменьшается до нуля равномерно, то

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_2 - I_1}{\Delta t} = -\frac{I_1}{\Delta t}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{si} = \frac{LI_1}{\Delta t};$$

$$\mathcal{E}_{si} = \frac{128 \cdot 0{,}1}{0{,}01} = 1280 \text{ (В)}.$$

79. Сила тока в соленоиде равномерно возрастает от 0 до 10 А за 1 мин, при этом соленоид накапливает энергию 20 Дж. Какая ЭДС индуцируется в соленоиде?

Дано: $I_0 = 0$; $I_1 = 10$ А; $t = 60$ с; $W = 20$ Дж.

Найти: $\mathcal{E}$.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида с индуктивностью L, по которому течет ток I, равна

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

откуда

$$L = \frac{2W}{I^2}.$$

ЭДС самоиндукции, возникающая в соленоиде при изменении тока в его обмотке на $\Delta I = I_1 - I_0$ за время Δt, будет:

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}; \text{ или } \mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{2W}{I_1^2} \cdot \frac{I_1}{\Delta t};$$

$$\mathcal{E} = -\frac{2 \cdot 20 \cdot 10}{10^2 \cdot 60} \simeq -0{,}067 \text{ (В)}.$$

80. Однослойный соленоид без сердечника длиной 20 см и диаметром 4 см имеет плотную намотку медным проводом диаметром 0,1 мм. За 0,1 с сила тока в нем равномерно убывает с 5 А до 0. Определить ЭДС самоиндукции в соленоиде.

Дано: $l = 0{,}2$ м; $D = 0{,}04$ м; $d = 10^{-4}$ м; $t = 0{,}1$ с; $I_0 = 5$ А; $I_1 = 0$.

Найти: $\mathcal{E}_{si}$.

Решение. ЭДС самоиндукции, возникающая при изменении тока ΔI в соленоиде за время Δt,

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} \text{ или } \mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Индуктивность соленоида равна:

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS,$$

где μ_0 — магнитная постоянная; n — число витков на единице длины соленоида $\left(\text{при плотной намотке } n = \frac{1}{d}\right)$, l — длина соленоида, $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения соленоида, D — диаметр соленоида, $\mu = 1$.

$$\mathcal{E}_{si} = -\mu_0 \frac{1}{d^2} l \frac{\pi D^2}{4} \frac{\Delta I}{\Delta t};$$

$$\mathcal{E}_{si} = \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04^2 \cdot 5}{10^{-8} \cdot 4 \cdot 0{,}1} \simeq 1{,}6 \text{ (В)}.$$

81. Обмотка соленоида имеет сопротивление 10 Ом. Какова его индуктивность, если при прохождении тока за 0,05 с в нем выделяется количество теплоты, эквивалентное энергии магнитного поля соленоида?

Дано: $R = 10$ Ом; $t = 0{,}05$ с; $W = Q$.

Найти: L.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида равна:

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

а количество теплоты Q определяется по закону Джоуля—Ленца:

$$Q = I^2 Rt.$$

Так как $W = Q$, то $\frac{LI^2}{2} = I^2 Rt$,

откуда $L = 2Rt$; $L = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}05 = 1$ (Гн).

82. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю напряженностью $2 \cdot 10^5$ А/м, вращается стержень длиной 0,4 м относительно оси, проходящей через его сердцевину. В стержне индуцируется ЭДС 0,2 В. Определить угловую скорость стержня.

Дано: $H = 2 \cdot 10^5$ А/м; $l = 0{,}4$ м; $\mathcal{E}_i = 0{,}2$ В; $\mu = 1$.

Найти: ω.

Решение. ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока Ф, пересекаемого стержнем при вращении:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt},$$

где $B = \mu\mu_0 H$ — индукция поля, dS — площадь, пересекаемая стержнем при вращении с угловой скоростью ω.

Половина стержня, имея радиус $r = \frac{l}{2}$, при повороте на угол $d\varphi$ пересечет площадь $dS' = \frac{r^2}{2} d\varphi$, а весь стержень пересечет площадь $dS = 2dS' = r^2 d\varphi$.

Тогда $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = \mu\mu_0 H r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \mu\mu_0 H r^2 \omega$.

Откуда

$$\omega = \frac{-\mathcal{E}_i}{\mu_0 H r^2}; \quad \omega = \frac{-0{,}2}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2^2} \simeq -20 \ (\text{с}^{-1}).$$

83. Соленоид без сердечника длиной 15 см и диаметром 4 см имеет 100 витков на 1 см длины и включен в цепь источника тока. За 1 мс сила тока в нем изменилась на 10 мА. Определить ЭДС самоиндукции, считая, что ток в цепи изменяется равномерно.

Дано: $l = 0{,}15$ см; $D = 0{,}04$ м; $n = 10^4$ м$^{-1}$; $\mu = 1$; $\Delta I = 10^{-2}$ А; $\Delta t = 10^{-3}$ с.

Найти: $\mathcal{E}_{si}$.

Решение. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt}$ или $\mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$.

Индуктивность соленоида $L = \mu\mu_0 n^2 l S$; $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Тогда:

$$L = 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}15 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04^2 \cdot \frac{1}{4} \simeq 2{,}4 \cdot 10^2 \ (\text{Гн}).$$

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}; \quad \mathcal{E}_{si} = -2{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \simeq -0{,}24 \ (\text{В}).$$

84. Соленоид с сердечником ($\mu = 1000$) длиной 15 см и диаметром 4 см имеет 100 витков на 1 см длины и включен в цепь источника тока. За 1 мс сила тока в нем изменилась на 10 мА. Определить ЭДС самоиндукции, считая, что ток в цепи изменяется равномерно.

Дано: $l = 0{,}15$ м; $D = 0{,}04$ м; $n = 10^4$ м$^{-1}$; $\mu = 1000$; $\Delta I = 10^{-2}$ А; $\Delta t = 10^{-3}$ с.

Найти: $\mathcal{E}_{si}$.

Решение. ЭДС самоиндукции равна:

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{dI}{dt} \text{ или } \mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Индуктивность соленоида вычисляется по формуле:

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S;\ S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

$$L = 10^3 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 0{,}15 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}25 \simeq 24 \text{ (Гн)}.$$

$$\mathcal{E}_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t};$$

$$\mathcal{E}_{si} = -24 \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \simeq -240 \text{ (В)}.$$

85. Однородное магнитное поле напряженностью 900 А/м действует на помещенный в него проводник длиной 25 см с силой 1 мН. Определить силу тока в проводнике, если угол между направлением тока и индукции поля равен 45°.

Дано: $H = 900$ А/м; $l = 0{,}25$ м; $F = 10^{-3}$ Н; $\alpha = 45°$.

Найти: I.

Решение. По закону Ампера на проводник длиной l с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией $B = \mu\mu_0 H$, со стороны поля действует сила $F = BIl\sin\alpha$, где α — угол между направлением тока и поля, μ_0 — магнитная постоянная. Тогда

$$I = \frac{F}{\mu\mu_0 Hl\sin\alpha};$$

$$I = \frac{10^{-3} \cdot 2}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 900 \cdot 0{,}25 \cdot \sqrt{2}} = 5 \text{ (А)}.$$

86. Перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией 0,3 Тл движется проводник длиной 15 см со скоростью 10 м/с. Направление нормали к проводнику и скорости совпадают. Определить ЭДС, индуцируемую в проводнике.

Дано: $B = 0{,}3$ Тл; $l = 0{,}15$ м; $\upsilon = 10$ м/с.

Найти: $\mathcal{E}_i$.

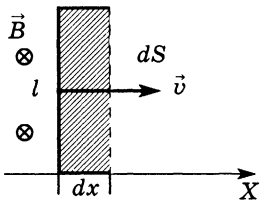


Рис. 42

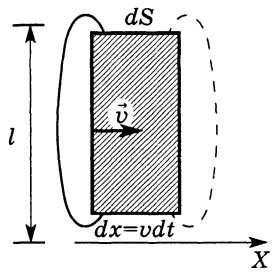


Рис. 43

Решение. ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока Ф:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитный поток $\Phi = BS$, где S — площадь, которую пронизывает магнитное поле с индукцией B (рис. 42). Элементарный магнитный поток $d\Phi = BdS = Bldx$. Тогда

$$\mathcal{E}_i = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv;\ \mathcal{E}_i = -0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 10 = -0{,}45\ (\text{В}).$$

87. На концах крыльев самолета с размахом 20 м, летящего со скоростью 900 км/ч, возникает ЭДС индукции 0,06 В. Определить вертикальную составляющую напряженности магнитного поля Земли.

Дано: $l = 20$ м; $v = 250$ м/с; $\mathcal{E}_i = 0{,}06$ В.

Найти: H.

Решение. Летящий самолет пересекает магнитное поле Земли, напряженность которого H связана с индукцией B соотношением $B = \mu\mu_0 H$. ЭДС индукции, возникающая при этом, равна $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ скорости изменения магнитного потока Ф, пересекаемого крыльями самолета, $\Phi = BS$.

За время dt самолет пересечет площадь

$$dS = ldx = lvdt \text{ (рис. 43).}$$

Следовательно,

$$d\Phi = Blvdt \text{ и } \mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{Blvdt}{dt} = \mu\mu_0 Hlv,$$

откуда

$$H = \frac{\mathcal{E}_i}{\mu\mu_0 lv};\ H = \frac{0{,}06}{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 250} \simeq 9{,}6\ (\text{А/м}).$$

88. По соленоиду течет ток силой 5 А. Длина соленоида 1 м, число витков 500. В соленоид вставлен железный сердечник. Найти намагниченность и объемную плотность энергии магнитного поля соленоида. Зависимость $B = f(H)$ дана на рис. 41.

Дано: $I = 5$ А; $l = 1$ м; $N = 500$.

Найти: J, w.

Решение. Намагниченность определяется отношением магнитного момента к объему магнетика и связана с напряженностью магнитного поля соотношением

$$J = \chi H, \tag{1}$$

где χ — магнитная восприимчивость среды.

Поле соленоида можно считать однородным. В этом случае напряженность поля вычисляется по формуле

$$H = In, \tag{2}$$

где I — сила тока, текущего по обмотке соленоида.

Тогда

$$H = \frac{IN}{l}. \tag{3}$$

Связь между магнитной восприимчивостью χ и магнитной проницаемостью μ среды выражается формулой

$$\chi = \mu - 1. \tag{4}$$

Определим напряженность магнитного поля соленоида по формуле (3)

$$H = 5 \cdot \frac{500}{1} = 2500 \text{ (А/м)}.$$

По графику на рис. 39 находим, что напряженности $H = 2500$ А/м соответствует индукция магнитного поля $B = 1{,}6$ Тл. Используя соотношение $B = \mu\mu_0 H$, определим μ:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H};\ \mu = \frac{1{,}6}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 2500} = 509.$$

Согласно формуле (4) имеем $\chi = 509 - 1 = 508$. Определим намагниченность по формуле (1):

$$J = 508 \cdot 2500 = 12{,}7 \text{ (А/м)}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля соленоида вычисляется по формуле:

$$w = \frac{BH}{2};\ w = \frac{1{,}6 \cdot 2500}{2} = 2 \cdot 10^3 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

89. По обмотке соленоида с параметрами: число витков 1000, длина 0,5 м, диаметр 4 см течет ток 0,5 А. Определить потокосцепление, энергию, объемную плотность энергии соленоида.

Дано: $N = 1000$; $l = 0{,}5$ м; $D = 0{,}04$ м; $I = 0{,}5$ А; $\mu = 1$.

Найти: ψ, W, w.

Решение. Напряженность магнитного поля соленоида $H = I\frac{N}{l}$, индукция $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 I\frac{N}{l}$, объемная плотность энергии $w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sl}$, а через характеристики поля $w = \frac{BH}{2}$.

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2} I^2 \frac{N^2}{l^2};$$

$$w = \frac{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}25 \cdot 10^6}{2 \cdot 0{,}25} \simeq 0{,}63 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

$$W = wSl;\ W = 0{,}63 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot 0{,}5 \simeq 4 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Потокосцепление ψ соленоида равно:

$$\psi = BSN = B\frac{\pi D^2}{4} N = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} \frac{\pi D^2}{4} N;$$

$$\psi = \frac{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 0{,}5} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ (Вб)}.$$

90. Однородное магнитное поле, объемная плотность энергии которого 0,4 Дж/м^3, действует на проводник с током, расположенный перпендикулярно линиям индукции с силой 0,1 мН на 1 см его длины. Определить силу тока в проводнике.

Дано: $w = 0{,}4$ Дж/м^3; $F = 10^{-3}$ Н; $l = 10^{-2}$ м; $\alpha = 90°$.

Найти: I.

Решение. На проводник с током I длиной l, помещенный в магнитное поле с индукцией B, действует сила Ампера F:

$$F = BIl\sin\alpha,$$

откуда

$$B = \frac{F}{Il} \ (\sin 90° = 1),$$

объемная плотность энергии равна:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu},\ w = \frac{F^2}{2\mu_0\mu I^2 l^2}, \text{ откуда}$$

$$I = \frac{F}{l}\sqrt{\frac{1}{2w\mu\mu_0}};\ I = \frac{10^{-3}}{10^{-2}}\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 1}} \simeq 100 \text{ (А)}.$$

91. Чему равна объемная плотность энергии магнитного поля в соленоиде без сердечника, имеющего плотную однослойную намотку проводом диаметром 0,2 мм, если сила тока в нем 0,1 А?

Дано: $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $I = 0{,}1$ А.

Найти: w.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида равна:

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

где $L = \mu\mu_0 n^2 lS$ — индуктивность соленоида, I — ток, μ_0 — магнитная постоянная, n — число витков на 1 м соленоида $\left(\text{при плотной намотке } n = \frac{1}{d}\right)$, l — длина, S — площадь поперечного сечения соленоида.

Объемная плотность энергии

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{Sl} = \frac{\mu\mu_0 \cdot 1 \cdot lSI^2}{2d^2 Sl};$$

$$w = \frac{1 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2^2 \cdot 10^{-8}} \simeq 0{,}16 \text{ (Дж/м}^3\text{)}.$$

92. Соленоид без сердечника имеет плотную однослойную намотку проводом диаметром 0,2 мм, и по нему течет ток 0,1 А. Длина соленоида 20 см, диаметр 5 см. Найти энергию магнитного поля соленоида.

Дано: $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $I = 0{,}1$ А; $D = 0{,}05$ м; $l = 0{,}2$ м; $\mu = 1$.

Найти: W.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида равна: $W = \frac{LI^2}{2}$, где $L = \mu\mu_0 n^2 lS$ — индуктивность соленоида, μ_0 — магнитная постоянная, n — число витков на 1 м соленоида $\left(\text{при плотной намотке } n = \frac{1}{d}\right)$, l — длина, $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения соленоида. Тогда

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu\mu_0 \frac{1}{d^2} l \frac{\pi D^2}{4} \frac{I^2}{2};$$

$$W = \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}1^2}{4 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 2} \simeq 6{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)}.$$

93. По соленоиду длиной 0,25 м, имеющему 500 витков, течет ток 1 А. Площадь поперечного сечения соленоида 15 см^2. Найти энергию магнитного поля соленоида.

Дано: $I = 1$ А; $l = 0{,}25$ м; $\mu = 1$; $N = 500$; $S = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^2.

Найти: W.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида равна

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

где $L = \mu\mu_0 n^2 lS$ — индуктивность соленоида, $n = \frac{N}{l}$;

$$W = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l^2} l \cdot S \frac{I^2}{2};$$

$$W = \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 5^2 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 0{,}25} \simeq 9{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

6. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

94. Напряженность электрического поля в зазоре между обкладками конденсатора площадью 1 см^2, заполненного диэлектриком с $\varepsilon = 1000$, изменяется равномерно со скоростью 0,17 МВ/(м · с). Определить силу тока смещения в таком электрическом поле.

Дано: $S = 1$ см^2; $\frac{\partial E}{\partial t} = 0{,}17$ МВ/(м · с); $\varepsilon = 10^3$.

Найти: $I_{см}$.

Решение. По теории Максвелла плотность тока смещения $j_{см}$ равна скорости изменения электрического смещения D. $j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t}$. Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, где ε — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — электрическая постоянная, E — напряженность электрического поля, можно записать:

$$j_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t}.$$

По определению плотность тока смещения в случае постоянного тока равна

$$j_{см} = \frac{I_{см}}{S},$$

где S — площадь пластины конденсатора.

С учетом этого можно записать:

$$\frac{I_{см}}{S} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t},$$

откуда

$$I_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 S \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$I_{см} = 10^3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}7 \cdot 10^5 \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-7}\ (\text{А}).$$

95. При разрядке плоского конденсатора, площадь обкладок которого равна 10 см^2, заполненного диэлектриком с $\varepsilon = 10^3$, в подводящих проводах течет ток 1 мкА.

Определить скорость изменения напряженности электрического поля в конденсаторе.

Дано: $I = 10^{-6}$ А; $S = 10^{-3}$ м^2; $\varepsilon = 10^3$.

Найти: $\frac{\partial E}{\partial t}$.

Решение. Сила тока проводимости в подводящих проводах равна силе тока смещения в электрическом поле конденсатора $I_{пр} = I_{см}$.

Плотность тока смещения $j_{см}$ по определению равна

$$j_{см} = \frac{I_{см}}{S}.$$

С другой стороны, по Максвеллу

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

где D — электрическое смещение, связанное с напряженностью поля E соотношением $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$. С учетом этого запишем:

$$j_{см} = \frac{I_{см}}{S} = \frac{I}{S};$$

$$j_{см} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим:

$$\frac{I}{S} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \text{ откуда } \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Подставим числовые данные:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{10^{-6}}{10^3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}} \simeq 1{,}1 \cdot 10^5\ (\text{В}/(\text{м} \cdot \text{с})).$$

96. При разрядке длинного цилиндрического конденсатора длиной 5 см и внешним радиусом 0,5 см в подводящих проводах течет ток проводимости силой 0,1 мкА. Определить плотность тока смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора.

Дано: $l = 5$ см; $r = 0{,}5$ см; $I_{\text{пр}} = 0{,}1$ мкА.

Найти: $j_{\text{см}}$.

Решение. Считаем заряд конденсатора равным Q. По теореме Остроградского—Гаусса для вектора электрического смещения $\vec{D}$ поток вектора $\vec{D}$ сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса r равен заряду Q, охватываемому поверхностью интегрирования S:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q.$$

По условию задачи поток вектора $\vec{D}$ пронизывает боковую цилиндрическую поверхность $S = 2\pi rl$ нормально к ней, так как $D = D_n$.

$$\oint_S D_n dS = D \cdot 2\pi rl = Q, \text{ откуда } D = \frac{Q}{2\pi rl}.$$

Плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ равна

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2\pi rl} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{2\pi rl} \cdot I_{\text{пр}}.$$

$$j_{\text{см}} = \frac{1 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \simeq 6{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить силу электрического взаимодействия электрона с ядром в атоме водорода. Среднее расстояние электрона от ядра считать равным $0{,}5$ Å. **Ответ:** $9{,}2 \cdot 10^{-8}$ Н.

2. На каждом метре равномерно заряженной нити распределен заряд $2 \cdot 10^{-7}$ Кл. Около нити находится пылинка с зарядом $-1{,}65 \cdot 10^{-16}$ Кл, которая притягивается нитью с силой 10^{-10} Н. На каком расстоянии от нити находится пылинка? **Ответ:** $6 \cdot 10^{-3}$ м.

3. Изолированный шарик радиусом 0,04 м заряжен отрицательно до потенциала 400 В. Найти массу электронов, составляющих заряд шарика. **Ответ:** 10^{-20} кг.

4. Расстояние между точечными зарядами $-5 \cdot 10^{-8}$ Кл и $+8 \cdot 10^{-8}$ Кл равно 40 см. Найти напряженность поля в точке, находящейся посередине между зарядами. **Ответ:** $2{,}9 \cdot 10^4$ В/м.

5. Установить, на каком расстоянии от заряженного цилиндра напряженность поля равна $4 \cdot 10^5$ В/м. Диаметр цилиндра 4 см, поверхностная плотность заряда $8{,}85 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2. **Ответ**: 0,03 м.

6. Какой силы ток возникает в электрической лампе, работающей под напряжением 120 В, если ее вольфрамовая нить нагревается до 2000 °С? Сопротивление нити при 18 °С равно 40 Ом. **Ответ**: 0,29 А.

7. Во сколько раз сила электрического взаимодействия двух электронов больше гравитационного взаимодействия этих электронов? **Ответ**: в $4{,}2 \cdot 10^{42}$ раз.

8. Два проводящих шарика массой по 0,004 кг каждый подвешены в воздухе на непроводящих нитях длиной 205 см к одному крючку. Шарикам сообщили равные одноименные заряды, вследствие чего шарики разошлись на расстояние 90 см. Определить заряд каждого шарика. **Ответ**: 0,9 мкКл.

9. Электрон движется вокруг ядра водорода по круговой орбите радиусом $5{,}29 \cdot 10^{-9}$ см. Определить скорость электрона на этой орбите. **Ответ**: $2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

10. Определить потенциал поля, образованного диполем, в точках плоскости, перпендикулярной его оси и проходящей через середину отрезка, соединяющего заряды диполя. **Ответ**: 0.

11. В центре куба помещен заряд 10,6 нКл. Определить поток напряженности электрического поля, проходящего через грань куба. **Ответ**: 200 В · м.

12. Обкладки плоского конденсатора помещены в керосин ($\varepsilon = 2$). Какую работу надо совершить, чтобы раздвинуть обкладки конденсатора на расстояние от 2 до 11 см, если они заряжены до напряжения 600 В и отключены от источника? Площадь каждой обкладки 628 см^2. **Ответ**: 0,81 мкДж.

13. В центре квадрата расположен положительный заряд 0,25 мкКл. Какой заряд надо поместить в каждой вершине квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии? Что можно сказать о знаке зарядов? **Ответ**: 0,26 мкКл; отрицательный.

14. Между плоскими горизонтальными пластинами, заряженными равномерно, помещена пылинка массой 10^{-15} кг с зарядом $4{,}8 \cdot 10^{-19}$ Кл. Какова плотность зарядов пластин, если пылинка находится в равновесии? **Ответ**: $1{,}8 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2.

15. Площадь каждой обкладки плоского воздушного конденсатора 314 см^2, расстояние между ними 2 мм. Напряженность поля между обкладками 60 кВ/м. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть между обкладками конденсатора стеклянную пластинку,

если она полностью заполняет конденсатор и конденсатор после зарядки отключен от источника напряжения? **Ответ**: −0,86 мкДж.

16. Расстояние между обкладками плоского конденсатора равно 8 мм, площадь обкладок 62,8 см^2. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть между обкладками конденсатора стеклянную пластинку той же площади и толщиной 6 мм, если конденсатор присоединен к источнику напряжения 600 В? **Ответ**: 2,25 мкДж.

17. Пластины плоского слюдяного ($\varepsilon = 6$) конденсатора площадью 0,01 м^2 притягиваются с силой 30 мН. Найти заряд пластины, напряженность и объемную плотность энергии поля. **Ответ**: 178 нКл; 336 кВ/м; 3 Дж/м^3.

18. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора 0,01м^2, расстояние между ними 2 см, разность потенциалов на обкладках 3 кВ. Пластины раздвигают на расстояние 5 см, не отключая от источника напряжения. Найти энергию конденсатора до и после раздвижения пластин. **Ответ**: 20 мкДж; 8 мкДж.

19. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора 0,01 м^2, расстояние между ними 1 мм, разность потенциалов на обкладках 100 В. Пластины раздвигаются до расстояния 25 мм. Найти энергию конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается. **Ответ**: а) 442,5 нДж; 17,7 нДж; б) 442,5 нДж; 11,1 мкДж.

20. Найти объемную плотность энергии электрического поля в точке, находящейся на расстоянии 2 см от поверхности шара радиусом 1 см, заряженного с поверхностной плотностью заряда 16,7 мкКл/м^2. **Ответ**: 0,19 Дж/м^3.

21. Сила тока в проводнике равномерно возрастает от 0 до 2 А в течение 5 с. Определить заряд, прошедший по проводнику за это время. **Ответ**: 5 Кл.

22. Определить плотность тока, если за 2 с через проводник сечением 1,6 мм^2 прошло $2 \cdot 10^{19}$ электронов. **Ответ**: 10^6 А/м^2.

23. Сила тока в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно убывает с 10 А до 0 за 30 с. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за это время. **Ответ**: 100 кДж.

24. Плотность тока в медном проводнике равна 0,1 МА/м^2. Определить удельную тепловую мощность тока. **Ответ**: 170 Вт/м^3.

25. Плоский контур площадью 4 см^2 расположен параллельно однородному магнитному полю напряженностью 10^4 А/м. По контуру кратковременно пропустили ток силой 2 А, и контур начал свободно вращаться. Считая условно в начале движения силу тока и

вращающий момент неизменными, определить угловое ускорение контура, если его момент инерции 10^{-6} кг · м^2. **Ответ**: 10 с$^{-2}$.

26. Алюминиевый провод длиной 5 м и диаметром 1 мм покрыт изоляцией толщиной 1 см. Провод согнут пополам, причем обе половины прилегают друг к другу. С какой силой действует одна половина провода на другую, если при пропускании тока на концах провода создается разность потенциалов 1 В? **Ответ**: $7{,}9 \cdot 10^{-4}$ Н.

27. В прямоугольной рамке со сторонами 4 и 6 см сила тока 5 А. Определить напряженность магнитного поля в центре рамки. **Ответ**: 96 А/м.

28. Витки двухслойного длинного соленоида намотаны из проволоки радиусом 0,2 мм. В первом слое сила тока 3 А, во втором — 1 А. Определить напряженность магнитного поля внутри соленоида. Рассмотреть два случая: токи текут в одном направлении и в противоположных направлениях. **Ответ**: 10^4 А/м; $0{,}5 \times$ $\times$ 10^4 А/м.

29. По кольцу радиусом 15 см течет ток силой 10 А. В одной плоскости с кольцом находится длинный прямой изолированный проводник, сила тока в котором 10 А. Проводник совпадает с касательной к окружности кольцевого тока. Найти напряженность магнитного поля в центре кольца при различных направлениях токов. **Ответ**: 43,9 А/м, 22,7 А/м.

30. По прямому проводнику течет ток силой 50 А. В плоскости проводника расположена прямоугольная рамка, длинные стороны которой параллельны проводнику. Площадь поперечного сечения рамки 0,5 см^2, расстояние от центра до проводника 1 м. Определить магнитный поток, пронизывающий рамку. **Ответ**: $5 \cdot 10^{-10}$ Вб.

31. Соленоид имеет длину 1 м, площадь поперечного сечения 25 см^2 и число витков 1000. Энергия поля соленоида при силе тока 1 А равна 1,9 Дж. Определить магнитную проницаемость сердечника. **Ответ**: 1200.

32. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю напряженностью 100 А/м, вращается прямолинейный проводник длиной 1 м относительно оси, проходящей через конец проводника. По проводнику пропускают ток силой 10 А, угловая скорость вращения проводника 50 с$^{-1}$. Определить работу вращения проводника за 10 мин. **Ответ**: 18,8 Дж.

33. С какой скоростью движется перпендикулярно однородному магнитному полю напряженностью 500 А/м прямой проводник длиной 30 см и сопротивлением 0,1 Ом? При замыкании проводника по нему пошел бы ток силой 0,01 А. Влияние замыкающего провода не учитывать. **Ответ**: 5,3 м/с.

34. В соленоиде сила тока равномерно возрастает от 0 до 100 А в течение 2 с и при этом индуцируется $\mathcal{E}_i = 1$ В. Какую энергию накопит поле соленоида в конце возрастания силы тока? **Ответ**: 100 Дж.

35. Какой длины надо взять проволоку диаметром 0,1 мм, чтобы изготовить однослойный соленоид с индуктивностью 1 мГн? Площадь поперечного сечения соленоида 7,5 см^2. Сердечник отсутствует. **Ответ**: 10,3 м.

36. Вычислить максимальную напряженность магнитного поля, создаваемого α-частицей в точке, отстоящей от прямолинейной траектории частицы на расстоянии 10^{-8} см. Скорость α-частицы $5 \cdot 10^6$ см/с. **Ответ**: $1{,}27 \cdot 10^5$А/м.

37. Электрон влетает в однородное магнитное поле, индукция которого 0,01 Тл, и начинает двигаться по окружности. Определить период вращения электрона. **Ответ**: 3,57 нс.

38. По двум параллельным проводникам текут токи силой 8 и 12 А. Расстояние между проводниками 20 см. Найти геометрическое место точек, в которых магнитная индукция поля токов равна нулю. Направления токов выбрать самостоятельно. **Ответ**: 0,08 м, 0,12 м.

39. По изолированному проводнику, имеющему форму кольца радиусом 25 см, течет ток силой 15 А. Два прямых бесконечно длинных проводника — один в плоскости кольцевого проводника, другой перпендикулярно ей — касаются кольцевого проводника в точках, лежащих на противоположных концах диаметра. Силы токов в проводниках 10 и 20 А. Определить напряженность в центре кольцевого проводника при разных направлениях токов. Решение пояснить рисунком. **Ответ**: а) 38,54 А/м; 26,85 А/м; б) 43,21 А/м; 18,4 А/м.

40. Два проводника в виде полуколец лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Определить напряженность в центре полуколец при следующих данных: радиус первого полукольца 10 см, второго — 20 см, токи текут в одном направлении и сила тока соответственно равна 1 и 4 А. Поле от подводящих проводников не учитывать. **Ответ**: 7,5 А/м.

41. В средней части длинного соленоида находится отрезок проводника, сила тока в котором 4 А и длина 2 см. Проводник расположен перпендикулярно оси соленоида. На этот отрезок проводника действует сила 10^{-5} Н. Определить силу тока в обмотке соленоида при условии, что на 1 см длины соленоида приходится 10 витков и сердечник отсутствует. **Ответ**: 0,1 А.

42. Квадратная рамка площадью 20 см^2, состоящая из тысячи витков, расположена в однородном поле перпендикулярно полю с

индукцией 10^{-3} Тл. В течение 0,02 с рамку удалили за пределы поля. Какая ЭДС наводится в рамке? **Ответ**: 0,1 В.

43. В однородном магнитном поле с магнитной индукцией 4 Тл перпендикулярно магнитному полю движется прямолинейный проводник длиной 1 м со скоростью 25 м/с. Вектор магнитной индукции перпендикулярен проводнику и вектору скорости. Концы проводника соединены гибким проводом вне поля. Общее сопротивление цепи 5 Ом. Определить мощность, необходимую для движения проводника. **Ответ**: 2 кВт.

44. Напряженность магнитного поля замкнутого кольцеобразного соленоида равна 5600 А/м. Средний диаметр кольца 20 см, площадь сечения магнитопровода 5 $см^2$. Магнитная проницаемость сердечника 800 Гн/м. Найти энергию магнитного поля соленоида. **Ответ**: 4,9 Дж.

45. Однородное электрическое поле напряженностью 20 кВ/м и однородное магнитное поле напряженностью 3200 А/м взаимно перпендикулярны. В этих полях прямолинейно движется электрон. Определить скорость электрона. **Ответ**: 5000 км/с.

ЧАСТЬ 4

Колебания и волны

Основные формулы

- Уравнение гармонического колебания $s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

  где A — амплитуда колебания,
  ω — циклическая частота,
  φ_0 — начальная фаза.

- Период колебания маятников:
  пружинного $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

  физического $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$

  где m — масса маятника,
  k — жесткость пружины,
  J — момент инерции маятника,
  g — ускорение свободного падения,
  l — расстояние от точки подвеса до центра масс.

- Период колебаний в электрическом колебательном контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$

  где L — индуктивность контура,
  C — емкость конденсатора.

- Уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении оси OX $s = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right]$

  где υ — скорость распространения волны.

- Длина волны $\lambda = \upsilon T$

  где T — период волны.

- Скорость распространения электромагнитной волны $\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

  где c — скорость света в вакууме,
  ε — диэлектрическая проницаемость среды,
  μ — магнитная проницаемость среды.

- Скорость распространения звука в газах $\upsilon = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}$

  где γ — отношение теплоемкостей газа, при постоянном давлении и объеме,
  R — молярная газовая постоянная,
  T — термодинамическая температура,
  M — молярная масса газа.

- Вектор Пойнтинга $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$

  где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей электромагнитной волны.

- Оптическая длина пути в однородной среде $L = ns$

  где s — геометрическая длина пути световой волны, n — показатель преломления среды.

- Оптическая разность хода $\Delta = L_2 - L_1$

  где L_1 и L_2 — оптические пути двух световых волн.

- Условие интерференционного максимума $\Delta = \pm m\lambda_0,$ $m = 0, 1, 2, \ldots$

- Условие интерференционного минимума $\Delta = \pm(2m - 1)\frac{\lambda_0}{2}$ $m = 1, 2, \ldots$

  где λ_0 — длина световой волны в вакууме.

- Ширина интерференционных полос в опыте Юнга $\Delta x = \frac{\lambda_0 l}{d}$

  где d — расстояние между когерентными источниками света, l — расстояние от источников до экрана.

- Оптическая разность хода в тонких пленках:

  в проходящем свете $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$

  в отраженном свете $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2}$

  где d — толщина пленки, n — показатель преломления пленки, i — угол падения света.

- Радиусы светлых колец Ньютона

  в проходящем свете или темных в отраженном $r_m = \sqrt{m\lambda R}$, $m = 1, 2 \ldots$

  темных колец в проходящем свете или светлых в отраженном $r_m = \sqrt{(2m - 1)\lambda R/2}$ $m = 1, 2, \ldots$

  где R — радиус кривизны линзы, λ — длина световой волны в среде.

- Радиусы зон Френеля для

  сферической волновой поверхности $r_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a + b}}$ $m = 1, 2, \ldots$

плоской волновой поверхности

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

где a — радиус волновой поверхности
b — кратчайшее расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения.

- Направление дифракционных максимумов от одной щели

$$\varphi_0 = 0$$
$$a\sin\varphi_m = \pm\frac{(2m+1)\lambda}{2}$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

- Направление дифракционных минимумов

$$a\sin\varphi_m = \pm m\lambda$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

где a — ширина щели.

- Направление главных максимумов дифракционной решетки

$$c\sin\varphi_m = \pm m\lambda$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

где c — постоянная дифракционной решетки.

- Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

где $\Delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, разрешаемых решеткой,
m — порядок спектра,
N — общее число щелей решетки.

- Формула Вульфа—Брэгга

$$2d\sin\theta_m = m\lambda$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла,
θ_m — угол скольжения рентгеновских лучей.

- Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — максимальная и минимальная интенсивность поляризованного света.

- Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

где i_0 — угол Брюстера,
n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй сред.

- Закон Малюса

$$I = I_0\cos^2\alpha$$

где I_0 и I — интенсивность плоскополяризованного света, падающего и прошедшего через поляризатор,
α — угол между плоскостью поляризации падающего света и главной плоскостью поляризатора.

- Угол поворота плоскости поляризации света:

  в кристаллах и чистых жидкостях $\varphi = \varphi_0 l$

  растворах $\varphi = [\varphi_0] c l$

  где φ_0 — постоянная вращения,

  $[\varphi_0]$ — удельная постоянная вращения,

  c — концентрация оптически активного вещества в растворе,

  l — расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе.

- Фазовая скорость света $v = \frac{c}{n}$

  где c — скорость света в вакууме,

  n — показатель преломления среды.

- Дисперсия вещества $D = \frac{dn}{d\lambda}$

- Групповая скорость света $u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$

- Направление излучения Вавилова—Черенкова $\cos\theta = \frac{c}{nv}$

  где v — скорость заряженной частицы.

Примеры решения задач

1. Механические колебания и волны

1. Написать уравнение гармонического колебания, если амплитуда его 10 см, максимальная скорость 50 см/с, начальная фаза 15°. Определить период колебания и смещение колеблющейся точки через 0,2 с от начала колебания.

Дано: $A = 10$ см; $v_{max} = 50$ см/с $= 0{,}5$ м/с; $\varphi_0 = 15°$; $t = 0{,}2$ с.

Найти: $x(t)$, T, $x(0{,}2)$.

Решение. Уравнение гармонического колебания с начальной фазой φ_0 имеет вид

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi/T$. Скорость колеблющейся точки находится как первая производная смещения от времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальная скорость достигается при значении

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 1;\ v_{max} = A\omega,$$

откуда $$\omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{2\pi}{T};$$

$$T = \frac{2\pi A}{v_{max}};$$

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{0{,}5} \simeq 1{,}26 \text{ (с)};$$

$$\omega = \frac{v_{max}}{A} = 5 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Выразим начальную фазу в радианах

$$\varphi_0 = 2\pi \frac{15}{360} = \frac{\pi}{12}.$$

Тогда уравнение гармонического колебания запишется

$$x(t) = 0{,}1\sin\left(5t + \frac{\pi}{12}\right).$$

В момент времени $t = 0{,}2$ с смещение $x(t)$ будет равно:

$$x = 0{,}1\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{12}\right) = 0{,}1 \cdot \sin\pi\left(\frac{2t}{T} + \frac{1}{12}\right) \simeq 0{,}095 \text{ (м)}.$$

2. Точка совершает гармонические колебания с частотой 10 Гц. В момент, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение 1 мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.

Дано: $\nu = 10$ Гц; $x_{max} = 1$ мм.

Решение. Уравнение колебаний точки можно записать в виде

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1), \tag{1}$$

или

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_2), \tag{2}$$

где A — амплитуда колебаний; ω — циклическая частота; t — время; φ_1 и φ_2 — начальные фазы, соответствующие форме записи (1) или (2).

По определению амплитуда колебаний

$$A = x_{max}. \tag{3}$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{4}$$

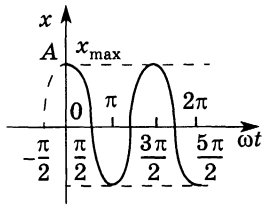


Рис. 44

Начальная фаза колебаний зависит от формы записи. Если использовать формулу (1), то начальную фазу можно определить из условия в момент времени $t = 0$ $x_{max} = A\sin\varphi_1$,

откуда $\varphi_1 = \arcsin\frac{x_{max}}{A} = \arcsin 1$,

или $$\varphi_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Изменение фазы на 2π не изменяет состояния колебательного движения, поэтому можно принять

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}. \qquad (5)$$

В случае второй формы записи получаем:

$$\varphi_2 = \arccos\frac{x_{max}}{A} = \arccos 1,$$

или $$\varphi_2 = 2\pi k,\ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

По тем же соображениям, что и в первом случае, находим

$$\varphi_2 = 0. \qquad (6)$$

С учетом равенств (3)—(6) уравнения колебаний примут вид:

$$x = x_{max}\sin\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$x = x_{max}\cos 2\pi\nu t,$$

где $x_{max} = 1$ мм $= 10^{-3}$ м; $\nu = 10$ Гц.

График соответствующего гармонического колебания приведен на рис. 44.

3. Материальная точка массой 20 г совершает гармонические колебания с периодом 9 с. Начальная фаза колебания 10°. Через какое время от начала движения смещение точки достигнет половины амплитуды? Найти амплитуду, максимальные скорость и ускорение точки, если полная ее энергия равна 10^{-2} Дж.

Дано: $m = 20$ г $= 0{,}02$ кг; $T = 9$ с; $\varphi_0 = 10° = \frac{\pi}{18}$, $x = 0{,}5$ A; $E = 10^{-2}$ Дж.

Найти: t, A, v_{max}, a_{max}.

Решение. Уравнение гармонического колебательного движения

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Из уравнения (1) можно определить время t:

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right);$$

$$\frac{x}{A} = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right); \frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 = \arcsin\frac{x}{A}.$$

$$t = \frac{\left(\arcsin\frac{x}{A} - \varphi_0\right) T}{2\pi}. \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения в формулу (2), получим

$$t = \frac{\left(\arcsin 0{,}5 - \frac{\pi}{18}\right)}{2\pi} \cdot 9 = \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}}{2\pi} \cdot 9 = 0{,}5 \text{ (с)}.$$

Амплитуду колебания можно определить из формулы полной энергии E колеблющейся точки:

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}, \qquad (3)$$

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m}}. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (4) числовые значения, получим

$$A = \frac{9}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}}} \simeq 1{,}43 \text{ (м)}.$$

Зная амплитуду, можно вычислить максимальную скорость точки, которая определяется как первая производная от смещения x по времени

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Полагая $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, получаем значение максимальной скорости:

$$v_{\max} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2E}{m}};$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}}} = 1 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение точки определяется как первая производная скорости по времени, т. е.

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Считая при максимальном ускорении $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$,

$$a_{max} = A\omega^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$a_{max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{9} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}}} = 6{,}98 \cdot 10^{-1}\ (\text{м/с}^2).$$

4. Материальная точка массой 1 г колеблется гармонически. Амплитуда колебания равна 5 см, циклическая частота 2 $с^{-1}$, начальная фаза равна 0. Определить силу, действующую на точку в тот момент, когда ее скорость равна 6 см/с.

Дано: $\upsilon = 6$ см/с $= 6 \cdot 10^{-2}$ м/с; $A = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м; $m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг; $\omega = 2$ $с^{-1}$.

Найти: F.

Решение. Скорость определяется первой производной от смещения по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Смещение x задано уравнением

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Находим скорость:

$$\upsilon = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Ускорение равно производной от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt},$$

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (2)$$

Возводим скорость и ускорение во вторую степень:

$$\upsilon^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0); \qquad (3)$$

$$a^2 = A^2\omega^4\sin^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (4)$$

Уравнение (3) разделим на $A^2\omega^2$, а уравнение (4) на $A^2\omega^4$ и сложим их:

$$\frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} + \frac{a^2}{A^2\omega^4} = 1.$$

Производим дальнейшие преобразования:

$$\upsilon^2\omega^2 + a^2 = A^2\omega^4;$$

$$a^2 = A^2\omega^4 - \upsilon^2\omega^2,\ a^2 = \omega^2(A^2\omega^2 - \upsilon^2).$$

Ускорение получается равным

$$a = \omega\sqrt{A^2\omega^2 - v^2}\,.$$

Следовательно, сила по второму закону Ньютона равна

$$F = ma,\ F = m\omega\sqrt{A^2\omega^2 - v^2}\,,$$

$$F = 10^{-3} \cdot 2\sqrt{(5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2^2 - (6 \cdot 10^{-2})^2} = 16 \cdot 10^{-5}\ (\text{Н}).$$

5. Найти закон изменения периода колебания математического маятника с поднятием маятника над поверхностью Земли.

Решение. Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{1}$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}\,, \tag{2}$$

где J — момент инерции маятника относительно оси колебаний, m — масса маятника, L — расстояние между центром тяжести маятника и осью колебаний.

Множитель $l = \dfrac{J}{mL}$ называется приведенной длиной маятника. Как видно из (1) и (2), период T зависит от ускорения свободного падения.

Тело массой m притягивается к Земле с силой, определяемой законом всемирного тяготения:

$$f = mg = G\frac{mM}{R^2}\,, \tag{3}$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли, R — расстояние от центра Земли до тела.

Из (3) находим g:

$$g = GM\frac{1}{R^2}\,. \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в (1) или (2), находим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{GM}}\,R. \tag{5}$$

Следовательно, период колебаний данного маятника прямо пропорционален расстоянию от маятника до центра Земли.

6. Однородный диск радиусом $R = 0{,}49$ м совершает малые колебания относительно оси, которой является гвоздь, вбитый перпендикулярно стенке. Колебания совершаются в плоскости, параллельной стене. Найти частоту колебаний диска, если гвоздь находится на расстоянии $d = 2R/3$ от центра диска.

Дано: $R = 0{,}49$ м; $d = 2R/3$.

Найти: ν.

Решение. Частота колебаний ν такого физического маятника равна:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Период колебаний физического маятника, как известно, равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}},$$

где J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр колебаний диска, m — масса диска, d — расстояние от оси колебаний до оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести маятника, g — ускорение свободного падения.

В нашем случае ось колебаний не проходит через центр тяжести диска и момент инерции диска J может быть найден по теореме Штейнера:

$$J = J_0 + md^2,$$

где $J_0 = \frac{mR^2}{2}$ — момент инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости диска.

Учитывая полученные соотношения, получим формулу для частоты колебания:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J}},\ d = \frac{2}{3}R,$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{\frac{mR^2}{2} + \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \cdot m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{36g}{51R}}.$$

Подставляя численные значения R и g, получим

$$\nu = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{36 \cdot 9{,}81}{51 \cdot 0{,}49}} \simeq 0{,}6\ (\text{Гц}).$$

7. Материальная точка массой 0,01 кг совершает гармонические колебания, уравнения которых имеют вид: $x = 0{,}2 \sin 8\pi t$ (м). Найти возвращающую силу в момент времени 0,1 с и полную энергию точки.

Дано: $m = 0{,}01$ кг, $t = 0{,}1$ с, $x = 0{,}2\sin 8\pi t$ (м), $\varphi_0 = 0$.

Найти: $F_в$, E.

Решение. Возвращающая сила при гармонических колебаниях равна:

$$F_в = ma = -kx,$$

где a — ускорение колеблющейся точки, которое имеет вид

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Тогда $$F_в = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Подставляем численные значения величин, входящих в формулу для $F_в$ из условия задачи, а также из уравнения колебания: $A = 0{,}2$ м, $\omega = 8\pi$ с$^{-1}$ получаем:

$$F_в = -0{,}01 \cdot 0{,}2(8\pi)^2 \sin 8\pi \simeq -0{,}74 \text{ (Н)}.$$

Согласно закону сохранения энергии, полная энергия при колебательном движении будет равна максимальной кинетической энергии при гармоническом колебательном движении:

$$E = E_{к\,max} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2, \text{ так как } \upsilon = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\upsilon = \upsilon_{max} \text{ при } \cos(\omega t + \varphi_0) = 1.$$

Найдем значение полной энергии, подставив в уравнение для E численные значения:

$$E = \frac{0{,}01(0{,}2 \cdot 8 \cdot 3{,}14)^2}{2} \simeq 0{,}126 \text{ (Дж)}.$$

8. Материальная точка массой 0,01 кг совершает гармонические колебания с периодом 2 с. Полная энергия колеблющейся точки 10^{-4} Дж. Найти амплитуду колебаний, написать уравнение колебаний, найти наибольшее значение силы, действующей на точку.

Дано: $m = 0{,}01$ кг; $T = 2$ с; $E_{полн} = 10^{-4}$ Дж.

Найти: A, $x(t)$, F_{max}.

Решение. Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Скорость υ колеблющейся точки — это первая производная от смещения по времени

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки будет

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Полная энергия точки равна максимальному значению кинетической энергии $E_{полн} = E_{к\ max} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$ (когда $\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1$).

Отсюда

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E_{полн}}{m}} = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E_{полн}}{m}};$$

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{0{,}01}} \simeq 0{,}045\ (м).$$

Значение циклической частоты $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi = 3{,}14\ (с^{-1})$. Уравнение колебаний будет иметь вид $x = 0{,}045\sin(\pi t + \varphi_0)$.

Ускорение колеблющейся точки — это первая производная от скорости по времени

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальное значение ускорения будет при условии, когда $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$, $a_{max} = A\omega^2$, а наибольшее значение силы будет

$$F_{max} = ma_{max} = mA\omega^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}045 \cdot 3{,}14^2 \simeq 4{,}4 \cdot 10^{-3}\ (Н).$$

9. В упругой среде распространяется волна со скоростью 20 м/с. Частота колебаний 2 $с^{-1}$, амплитуда 0,02 м. Определить фазу колебаний, смещение, скорость, ускорение точки, отстоящей на расстоянии 60 м от источника в момент времени $t = 4$ с, и длину волны.

Дано: $\upsilon = 20$ м/с, $\nu = 2\ с^{-1}$, $A = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $t = 4$ с, $l = 60$ м.

Найти: φ, x, υ, a, λ.

Решение. Фаза колебаний, смещение, скорость и ускорение точки определяются с помощью уравнения бегущей волны:

$$x = A\sin\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right),$$

где x — смещение точки, A — амплитуда колебаний, $\varphi = \omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right)$ — фаза колебаний. Фаза колебаний в момент времени t будет равна:

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right) = 2\pi\nu\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right).$$

Подставив численные значения величин, получим:

$$\varphi = 2\pi \cdot 2\left(4 - \frac{60}{20}\right) = 4\pi.$$

Смещение точки в этот момент равно:

$$x = A\sin 4\pi = 0.$$

Скорость точки найдем как первую производную от смещения по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right) = A \cdot 2\pi\nu\cos\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right).$$

Подставив численные значения величин, получим:

$$\upsilon = 0{,}02 \cdot 6{,}28 \cdot 2\cos 4\pi \simeq 0{,}25 \text{ (м/с)}.$$

Ускорение точки найдем как первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right).$$

Подставив численные значения, получим, что ускорение a, как и смещение x, в данный момент равно нулю:

$$a = -0{,}02 \cdot (2\pi\nu)^2\sin 4\pi = 0.$$

Длину волны, т. е. расстояние, которое проходит волна за один период, найдем из соотношения

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu.$$

Отсюда $$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu};\ \lambda = \frac{20}{2} = 10 \text{ (м)}.$$

10. Волна распространяется по прямой со скоростью 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии 12 и 15 м от источника колебаний, колеблются по закону синуса с амплитудами, равными 0,1 м, и с разностью фаз 135°. Найти длину волны, написать ее уравнение и найти смещение указанных точек в момент времени t =1,2 с.

Дано: $\upsilon = 20$ м/с; $l_1 = 12$ м; $l_2 = 15$ м; $A = 0{,}1$ м; $\Delta\varphi = 135°$; $t = 1{,}2$ с.

Найти: λ, x_1, x_2, $x(t)$.

Решение. Уравнение бегущей волны имеет вид

$$x = A\sin\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right),$$

где x — смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии l от источника колебания в момент времени t, A — амплитуда колебаний, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота, T — период колебаний, υ — фазовая скорость волны.

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$; точки, находящиеся на любом расстоянии Δl, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{\lambda}2\pi$, откуда

$$\lambda = \frac{\Delta l}{\Delta\varphi}2\pi = \frac{l_2 - l_1}{\Delta\varphi}2\pi.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\lambda = \frac{15 - 12}{0{,}75} \cdot 2\pi = 8 \text{ (м)}.$$

Скорость волны υ связана с периодом колебаний T и длиной волны λ соотношением $\lambda = \upsilon T$, откуда $T = \frac{\lambda}{\upsilon} = \frac{8}{20} = 0{,}4$ (с).

Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi$ ($с^{-1}$).

Уравнение волны будет иметь вид

$$x = 0{,}1\sin 5\pi\left(t - \frac{l}{20}\right).$$

Смещение указанных точек будет равно

$$x_1 = 0{,}1\sin 5\pi\left(1{,}2 - \frac{12}{20}\right) = 0{,}1\sin 3\pi = 0,$$

$$x_2 = 0{,}1\sin 5\pi\left(1{,}2 - \frac{15}{20}\right) = 0{,}1\sin 2{,}25\pi = 0{,}1\sin 0{,}25\pi \simeq 0{,}07 \text{ (м)}.$$

11. Колеблющиеся точки, находящиеся на одном луче, удалены от источника колебания на 6 и 8,7 м и колеблются с разностью фаз $3\pi/4$. Период колебания источника 10^{-2} с. Чему равна длина волны и скорость распространения колебаний в данной среде? Составить уравнение волны для первой и второй точек, считая амплитуды колебаний точек равными 0,5 м.

Дано: $l_1 = 6$ м; $l_2 = 8{,}7$ м; $\Delta\varphi = 3\pi/4$, $T = 10^{-2}$ с; $A_1 = A_2 = 0{,}5$ м.

Найти: λ, υ.

Решение. Длину волны λ определяем из уравнения волны по разности фаз $\Delta\varphi$ и расстоянию точек от источника. Это уравнение может быть записано в таком виде:

$$x = A\sin\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right), \text{ или} \tag{1}$$

$$x = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right). \tag{2}$$

В уравнении (2) выражение $2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)$ является фазой колебания. Запишем фазы для каждой из точек

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l_1}{\lambda}\right) \text{ и } \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l_2}{\lambda}\right). \tag{3}$$

Определим разность фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{l_2 - l_1}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Из уравнения (4) определяем длину волны

$$\lambda = \frac{2\pi(l_2 - l_1)}{\Delta\varphi}.$$

Подставляя заданные значения, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(8{,}7 - 6{,}0)}{\frac{3}{4}\pi} = 7{,}2 \text{ (м)}.$$

Скорость распространения волны находим из известной формулы $\upsilon = \lambda/T$. Определяем числовое значение скорости:

$$\upsilon = \frac{7{,}2}{10^{-2}} = 720 \text{ (м/с)}.$$

Циклическая частота ω определяется из соотношения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10^{-2}} = 200\pi \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Подставляя числовые значения в уравнение (1), получаем уравнения волны, отображающие колебания первой и второй точек:

$$x_1 = 0{,}5\sin 200\pi\left(t - \frac{6}{720}\right);$$

$$x_2 = 0{,}5\sin 200\pi\left(t - \frac{8{,}7}{720}\right).$$

2. Электромагнитные колебания и волны

12. Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 10\cos 10^4 t$ (В). Емкость конденсатора 10 мкФ. Найти индуктивность контура и закон изменения силы тока в нем.

Дано: $U = 10\cos 10^4 t$ (В); $C = 10^{-5}$ Ф.

Найти: L, $I(t)$.

Решение. Напряжение U на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по гармоническому закону $U = U_0\cos \omega t$, где U_0 — амплитудное значение напряжения, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — циклическая частота (в условии задачи $\omega = 10^{-4}$ с$^{-1}$), L — индуктивность, C — емкость конденсатора.

Отсюда

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{1 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}} = 10^{-3} \text{ (Гн)}.$$

Заряд на обкладках конденсатора Q равен

$$Q = CU = CU_0\cos \omega t.$$

Сила тока по определению

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_0 \sin \omega t.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$I = -10^4 \cdot 10^{-5} \cdot 10\sin 10^4 t = -\sin 10^4 t \text{ (А)}.$$

13. Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону $I = 0{,}1\sin 10^3 t$ (А). Индуктивность контура 0,1 Гн. Найти закон изменения напряжения на конденсаторе и его емкость.

Дано: $I = 0{,}1\sin 10^3 t$ (А); $L = 0{,}1$ Гн.

Найти: C, $U(t)$.

Решение. Выражение для силы тока в колебательном контуре имеет вид $I = I_0\sin \omega t$, где $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — циклическая частота (по условию задачи $\omega = 10^3$ с$^{-1}$), C — емкость, L — индуктивность контура. Отсюда

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^6 \cdot 0{,}1} = 10^{-5} \text{ (Ф)}.$$

Напряжение на конденсаторе равно ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке с индуктивностью L, и будет иметь вид:

$$U = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -LI_0\omega\cos\,\omega t;$$
$$U = -0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 10^3 \cos\,10^3 t.$$
$$U = -10\cos\,10^3 t.$$

14. В колебательном контуре максимальная сила тока 0,2 А, максимальное напряжение на обкладках конденсатора 40 В. Найти энергию колебательного контура, если период колебаний 15,7 мкс.

Дано: $I_0 = 0{,}2$ А; $U_0 = 40$ В; $T = 15{,}7 \cdot 10^{-6}$ с.

Найти: W.

Решение. Энергия колебательного контура равна максимальной энергии магнитного поля или максимальной энергии электрического поля контура

$$W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Отсюда $$W = \frac{\sqrt{LC}I_0U_0}{2}.$$

Период колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Тогда $W = \frac{T \cdot I_0U_0}{4\pi} = \frac{15{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 40}{4 \cdot 3{,}14} = 10^{-5}$ (Дж).

15. Конденсатору емкостью 0,4 мкФ сообщают заряд 10 мкКл, после чего он замыкается на катушку с индуктивностью 1 мГн. Чему равна максимальная сила тока в катушке?

Дано: $C = 4 \cdot 10^{-7}$ Ф; $Q_0 = 10^{-5}$ Кл; $L = 10^{-3}$ Гн.

Найти: I_0.

Решение. В колебательном контуре происходит взаимопревращение энергии электрического $W_э$ и магнитного полей $W_м$. Максимальные значения энергий $W_э$ и $W_м$ равны $W_э = \frac{Q_0^2}{2C}$; $W_м = \frac{LI_0^2}{2}$. Приравнивая эти выражения, получим $\frac{Q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}$, откуда

$$I_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}};\ I_0 = \frac{10^{-5}}{10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-7}} = 0{,}5\ (\text{А}).$$

16. Максимальная сила тока в колебательном контуре 0,1 А, максимальное напряжение на обкладках конденсатора 200 В. Найти циклическую частоту колебаний, если энергия контура 0,2 мДж.

Дано: $I_0 = 0{,}1$ А, $U_0 = 200$ В, $W = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Найти: ω.

Решение. В колебательном контуре максимальная энергия магнитного поля равна максимальной энергии электрического поля:

$$W_э = \frac{CU_0^2}{2};$$

$$W_м = \frac{LI_0^2}{2};\ \frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2},$$

откуда $$W = \frac{\sqrt{LC}I_0U_0}{2}.$$

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Таким образом,

$$W = \frac{I_0U_0}{2\omega},$$

откуда $$\omega = \frac{I_0U_0}{2W};\ \omega = \frac{0{,}1 \cdot 200}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^4\ (\text{с}^{-1}).$$

17. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 444 пФ и катушки с индуктивностью 4 мГн. На какую длину волны настроен контур?

Дано: $C = 4{,}44 \cdot 10^{-10}$ Ф; $L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн.

Найти: λ.

Решение. Длина волны λ, на которую настроен контур, равна $\lambda = cT$, где c — скорость распространения волны, T — период колебаний в контуре.

По формуле Томсона период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Тогда

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC},$$

$$\lambda = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8\sqrt{4{,}44 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \simeq 2511\ (\text{м}).$$

18. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 37,5 нФ и катушки с индуктивностью 0,68 Гн. Максимальное значение заряда на обкладках конденсатора равно 2,5 мкКл.

Написать уравнения изменения напряжения и заряда на обкладках конденсатора и тока в цепи и найти значения этих величин в момент времени $T/2$.

Дано: $C = 3{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ф; $L = 0{,}68$ Гн; $Q = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Кл; $t = T/2$.

Найти: $U(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, U, I, Q.

Решение. Напряжение U и заряд Q на обкладках конденсатора связаны соотношением $U = Q/C$.

Изменение напряжения на обкладках конденсатора происходит по гармоническому закону, $U = U\cos\omega t$, где $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ — циклическая (или круговая) частота, ν — частота, T — период колебаний.

Период колебаний определяется по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

и равен $T = 6{,}28\sqrt{0{,}68 \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-8}} \simeq 10^{-3}$ (с).

Циклическая частота равна $\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot 10^3$ ($с^{-1}$).

Выражение $U = U(t)$ будет иметь вид

$$U = \frac{Q}{C}\cos\omega t;$$

$$U = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{3{,}75 \cdot 10^{-8}}\cos 2\pi \cdot 10^3 t = 66{,}7 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t).$$

Изменение заряда на обкладках конденсатора будет происходить в соответствии с выражением

$$Q = U \cdot C = 66{,}7 \cdot C \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) = 66{,}7 \cdot 3{,}75 \times$$
$$\times 10^{-8}\cos(2\pi \cdot 10^3 t) = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t)\ (\text{Кл}).$$

По определению сила тока $I = \frac{dQ}{dt}$. Тогда выражение для силы тока будет

$$I = \frac{dQ}{dt} = -2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 10^3 \sin(2\pi \cdot 10^3 t);$$
$$I = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi \cdot 10^3 t)\ (\text{А}).$$

Значения искомых величин в момент времени $T/2$ равны:

$$I = -15{,}7 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot T/2) = -15{,}7 \cdot 10^{-3}\sin\pi = 0.$$
$$U = 66{,}7 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot T/2) = 66{,}7 \cdot \cos\pi = -66{,}7\ (\text{В}).$$
$$Q = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot T/2) = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\pi =$$
$$= -2{,}5 \cdot 10^{-6}\ (\text{Кл}).$$

19. Изменение разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре происходит в соответствии с уравнением $U = 50\cos 10^4\pi t$. Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найти период колебаний, индуктивность контура, закон изменения силы тока со временем и длину волны.

Дано: $U = 50\cos 10^4\pi t$; $C = 10^{-7}$ Ф.

Найти: T, L, $I(t)$, λ.

Решение. Напряжение U и заряд Q на конденсаторе емкостью C связаны соотношением $Q = UC$. Следовательно,

$$Q = C \cdot 50\cos 10^4\pi t = 50 \cdot 10^{-7} \cdot \cos 10^4\pi t = 5 \cdot 10^{-6}\cos 10^4\pi t \text{ (Кл)}.$$

Сила тока по определению равна $I = \frac{dQ}{dt}$.

$$I = -5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4\pi \sin 10^4\pi t = -0{,}157\sin 10^4\pi t \text{ (А)}.$$

В условии задачи циклическая частота $\omega = 10^4\pi$ и связана с периодом колебаний соотношением $\omega = 2\pi/T$, откуда $T = 2\pi/\omega$;

$$T = \frac{2\pi}{10^4\pi} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (с)}.$$

По формуле Томсона период колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$, откуда

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C};\ L = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 10^{-7}} \simeq 0{,}01 \text{ (Гн)}.$$

Длина излучаемой контуром электромагнитной волны равна $\lambda = vT$, где v — скорость волны, равная $3 \cdot 10^8$ м/с.

Тогда $\lambda = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^4$ (м).

20. В однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью, равной 2, и магнитной проницаемостью, равной 1, распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны 50 В/м. Найти амплитуду напряженности магнитного поля и фазовую скорость волны.

Дано: $\varepsilon = 2$; $\mu = 1$; $E_0 = 50$ В/м.

Найти: H_0, v.

Решение. Фазовая скорость волны v равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2 \cdot 1}} \simeq 2{,}12 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне колеблются в одной фазе, и для них выполняется соотношение $\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = \mu\mu_0 H_0^2$. Откуда получаем

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E_0;\ H_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{12{,}56 \cdot 10^{-7}}} \cdot 50 \simeq 0{,}19 \text{ (А/м)}.$$

21. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с магнитной проницаемостью, равной 1, имеет вид $E = 10\sin(6{,}28 \cdot 10^8 t - 4{,}19x)$. Определить диэлектрическую проницаемость среды и длину волны.

Дано: $\mu = 1$; $E = 10\sin(6{,}28 \cdot 10^8 t - 4{,}19x)$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Найти: ε, λ.

Решение. Уравнение плоской электромагнитной волны в общем виде $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$, где E_0 — амплитудное значение напряженности электрического поля, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ – длина волны, ω — циклическая частота, $\omega = kv$, v — фазовая скорость. По условию задачи $k = 4{,}19$ м$^{-1}$. Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \lambda = \frac{6{,}28}{4{,}19} \simeq 1{,}5 \text{ (м)}.$$

Фазовая скорость волны $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$.

Отсюда $$\varepsilon = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{c^2}{v^2}$$

или с учетом того, что $v = \omega/k$, а ω по условию задачи равна $6{,}28 \cdot 10^8$ с$^{-1}$, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu}\left(\frac{c \cdot k}{\omega}\right)^2; \ \varepsilon = \frac{9 \cdot 10^{16} \cdot 4{,}19^2}{6{,}28^2 \cdot 10^{16}} = 4.$$

22. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электромагнитного поля которой 100 В/м.

Какую энергию переносит эта волна через площадку 50 см^2, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за 1 мин? Период волны $T \ll t$.

Дано: $E_0 = 100$ В/м; $S = 50$ см$^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^2; $t = 1$ мин $= 60$ с; $T \ll t$.

Найти: W.

Решение. Энергия, переносимая через площадку S, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени равна

$$\frac{dW}{dt} = wcS,$$

где w — объемная плотность энергии.

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2},$$

или с учетом того, что

$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2, \ w = \varepsilon_0 E^2.$$

Напряженность электрического поля волны $E = E_0 \sin \omega t$.

Таким образом, $\frac{dW}{dt} = cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t$.

Энергия, переносимая волной за время t, будет определяться интегралом

$$W = \int_0^t cS\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t dt = cS\varepsilon_0 E_0^2 \int_0^t \sin^2 \omega t dt =$$

$$= cS\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right).$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому

$$\frac{t}{2} \gg \frac{\sin 2\omega t}{4\omega},$$

и тогда $$W = \frac{1}{2} cS\varepsilon_0 E_0^2 t;$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 60 \simeq 4 \text{ (Дж)}.$$

23. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны 0,1 А/м. Определить энергию, переносимую этой волной через поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за время $t = 1$ с. Период волны $T \ll t$.

Дано: $H_m = 0{,}1$ А/м; $S = 1$ м^2; $t = 1$ с; $T \ll t$; $\varepsilon = 1$; $\mu = 1$.

Найти: W.

Решение. Плотность потока энергии электромагнитной волны определяется вектором Пойнтинга

$$\vec{P} = \vec{E} \cdot \vec{H}. \quad (1)$$

Учитывая, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ электромагнитной волны взаимно-перпендикулярны, для модуля вектора $\vec{P}$ получим

$$P = EH. \quad (2)$$

Так как величины E и H в каждой точке волны меняются со временем по гармоническому закону, находясь в одинаковых фазах, то мгновенное значение P равно

$$P = E_m \sin \omega t \cdot H_m \sin \omega t = E_m H_m \sin^2 \omega t. \quad (3)$$

Энергия, переносимая через площадку S, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени:

$$\frac{dW}{dt} = \int_S \vec{P} d\vec{S} = PS = SE_m H_m \sin^2 \omega t. \quad (4)$$

Учитывая, что в электромагнитной волне

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_m^2 = \frac{1}{2}\mu_0\mu H_m^2, \tag{5}$$

найдем

$$E_m = H_m\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}. \tag{6}$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$\frac{dW}{dt} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\, H_m^2 S \sin^2\omega t. \tag{7}$$

Энергия, переносимая волной за время t, равна

$$W = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\, H_m^2 S\int_0^t \sin^2\omega dt = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\, H_m^2 S\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right). \tag{8}$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому $\frac{t}{2} \gg \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$, тогда

$$W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\, H_m^2 St. \tag{9}$$

Подставляя числовые значения, получим

$$W = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 1}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1}}\cdot(0{,}1)^2\cdot 1\cdot 1 \simeq 1{,}88\ (\text{Дж}).$$

3. Волновые свойства света

24. Какую наименьшую толщину должна иметь мыльная пленка, чтобы отраженные лучи имели красную окраску (λ = 0,63 мкм)? Белый луч падает на пленку под углом 30° (n = 1,33).

Дано: $\lambda = 6{,}3\cdot 10^{-7}$ м; $i = 30°$; $n = 1{,}33$.

Найти: $d_{\min}$.

Решение. Условие максимума при интерференции

$$\Delta = k\lambda,$$

где Δ — разность хода лучей, k — порядок интерференционного максимума, λ — длина волны.

При интерференции на тонкой пленке толщиной d, обладающей показателем преломления n, в отраженном свете разность хода лучей определяется выражением

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}.$$

Приравнивая выражения для Δ, получим:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda,$$

откуда

$$d = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Очевидно, что d будет минимальной при $k = 1$:

$$d_{\min} = \frac{0{,}5 \cdot 6{,}3 \cdot 10^{-7}}{2\sqrt{1{,}33^2 - 0{,}25}} \simeq 0{,}13 \cdot 10^{-6}\ (\text{м}) = 0{,}13\ (\text{мкм}).$$

25. Для получения колец Ньютона используют плосковыпуклую линзу. Освещая ее монохроматическим светом с длиной волны 0,6 мкм, установили, что расстояние между 5 и 6 светлыми кольцами в отраженном свете равно 0,56 мм. Определить радиус кривизны линзы.

Дано: $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м; $k_1 = 5$; $k_2 = 6$; $\Delta r = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ м.

Найти: R.

Решение. Расстояние Δr между кольцами есть разность радиусов r_6 и r_5 колец

$$\Delta r = r_6 - r_5.$$

Радиус светлого кольца в отраженном свете определяется по формуле:

$$r_k = \sqrt{(2k - 1)\frac{\lambda}{2}R},$$

где k — номер кольца.

$$\Delta r = \sqrt{(2 \cdot 6 - 1)\frac{\lambda}{2}R} - \sqrt{(2 \cdot 5 - 1)\frac{\lambda}{2}R} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2}}\,(\sqrt{11} - \sqrt{9});$$

$$(\Delta r)^2 = \frac{\lambda R}{2} \cdot (\sqrt{11} - 3)^2,$$

откуда

$$R = \frac{2 \cdot \Delta r^2}{(\sqrt{11} - 3)^2 \lambda} = \frac{2 \cdot 5{,}6^2 \cdot 10^{-8}}{0{,}32^2 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} \simeq 10{,}4\ (\text{м}).$$

26. Определить радиус 4-го темного кольца Ньютона в отраженном свете, если между линзой с радиусом кривизны 5 м и плоской поверхностью, к которой она прижата, находится вода. Свет с длиной волны 0,589 мкм падает нормально.

Дано: $R = 5$ м; $k = 4$; $n = 1{,}3$; $\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м; $n_в = 1{,}3$.

Найти: r_4.

Решение. Радиус каждого темного кольца в отраженном свете определяется по формуле

$$r_k = \sqrt{\frac{Rk\lambda}{n}}.$$

Тогда радиус 4-го кольца будет

$$r_4 = \sqrt{\frac{5 \cdot 4 \cdot 5{,}89 \cdot 10^{-7}}{1{,}3}} \simeq 3 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}) = 3\ (\text{мм}).$$

27. Монохроматический свет длиной волны 0,5 мкм падает на мыльную пленку ($n = 1{,}3$) толщиной 0,1 мкм, находящуюся в воздухе. Найти наименьший угол падения, при котором пленка в проходящем свете кажется темной.

Дано: $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м; $n = 1{,}3$; $d = 10^{-7}$ м.

Найти: $i_{\min}$.

Решение. Условие минимумов при интерференции:

$$\Delta = (2k - 1)\frac{\lambda}{2},$$

где Δ — разность хода лучей, k — порядок минимума в интерференционной картине, λ — длина волны.

Разность хода Δ при интерференции на тонкой пленке в проходящем свете определяется по формуле

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

где d — толщина пленки, n — показатель преломления, i — угол падения.

Приравнивая правые части выражений для Δ, получим

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Очевидно, что угол будет минимальным при $k = 1$:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2};$$

$$4d^2(n^2 - \sin^2 i) = \frac{\lambda^2}{4};$$

$$n^2 - \sin^2 i = \frac{\lambda^2}{16d^2};$$

$$\sin^2 i = n^2 - \frac{\lambda^2}{16d^2};$$

$$\sin^2 i = 1{,}3^2 - \frac{25 \cdot 10^{-14}}{16 \cdot 10^{-14}} \simeq 0{,}13;$$

$$\sin i = 0{,}36;\ i_{\min} \simeq 21°.$$

28. На пленку из глицерина ($n = 1{,}47$) толщиной 0,1 мкм падает белый свет. Каким будет казаться цвет пленки в отраженном свете, если угол падения лучей 45°?

Дано: $d = 0{,}1$ мкм; $n = 1{,}47$; $i = 45°$.

Найти: λ.

Решение. Условие максимума при интерференции $\Delta = k\lambda$. Разность хода лучей Δ при интерференции на тонкой пленке толщиной d:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},\ 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Предполагая $k = 1$, получим:

$$\lambda = 4d\sqrt{n^2 - \sin^2 i};\ \lambda = 4 \cdot 1 \cdot 10^{-7}\sqrt{1{,}47^2 - 0{,}5} \simeq 0{,}52 \text{ (мкм)}.$$

Такая длина волны соответствует зеленому цвету.

29. Радиус кривизны плосковыпуклой линзы 12,1 м. Диаметр второго светлого кольца Ньютона в отраженном свете равен 6,6 мм. Найти длину волны падающего света, если он падает нормально.

Дано: $R = 12{,}1$ м; $d = 6{,}6 \cdot 10^{-3}$ м; $k = 2$.

Найти: λ.

Решение. Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете определяется по формуле

$$r_k = \sqrt{(2k-1)\frac{\lambda}{2}R}.$$

Учитывая, что $r_k = \frac{d}{2}$, получим:

$$\lambda = \frac{2r_k^2}{(2k-1)R} = \frac{2d^2}{4(2k-1)R};\ \lambda = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}6^2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3 \cdot 12{,}1}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

30. Расстояние между двумя когерентными источниками (опыт Юнга) 0,55 мм. Источники испускают свет длиной волны 550 нм. Каково расстояние от щелей до экрана, если расстояние между соседними темными полосами на нем 1 мм?

Дано: $d = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ м; $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $\Delta x = 10^{-3}$ м.

Найти: l.

Решение. Расстояние Δx между соседними светлыми или темными полосами на экране в опыте Юнга определяется по формуле $\Delta x = \frac{\lambda l}{d}$;

$$l = \frac{\Delta x d}{\lambda};\ l = \frac{10^{-3} \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-4}}{5{,}5 \cdot 10^{-7}} = 1 \text{ (м)}.$$

31. Найти длину волны света, падающего на установку в опыте Юнга, если при помещении на пути одного из интерферирующих лучей стеклянной пластинки ($n = 1{,}52$) толщиной 3 мкм картина интерференции на экране смещается на 3 светлые полосы.

Дано: $n_1 = 1$; $n_2 = 1{,}52$; $l = 3 \cdot 10^{-6}$ м; $k = 3$.

Найти: λ.

Решение. При помещении пластинки с показателем преломления n_2 на пути одного из лучей образуется дополнительная разность хода лучей $\Delta = n_2 l - n_1 l$, которая по условию максимумов будет равна $\Delta = k\lambda$. Приравнивая правые части, получим $(n_2 - n_1)l = k\lambda$, откуда

$$\lambda = \frac{n_2 - n_1}{k} l; \quad \lambda = \frac{0{,}52 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{3} = 0{,}52 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

32. Найти расстояние между третьим и пятым минимумами на экране, если расстояние двух когерентных источников ($\lambda = 0{,}6$ мкм) от экрана 1 м, расстояние между источниками 0,2 мм.

Дано: $k_1 = 3$; $k_2 = 5$; $l = 1$ м; $\lambda = 0{,}6$ мкм; $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м.

Найти: $\Delta x_{5,3}$.

Решение. Расстояние x_k от центра интерференционной картины до минимума каждого порядка определяется по формуле

$$x_{k\,\min} = \pm(2k - 1)\frac{l}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда $$x_5 = \frac{9l\lambda}{2d}; \; x_3 = \frac{5l\lambda}{2d} \text{ и } \Delta x = x_5 - x_3 = \frac{2l\lambda}{d};$$

$$\Delta x = \frac{2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-4}} = 6 \text{ (мм)}.$$

33. Два когерентных источника, расстояние между которыми 0,2 мм, расположены от экрана на расстоянии 1,5 м. Найти длину световой волны, если 3-й интерференционный минимум расположен на расстоянии 12,6 мм от центра картины.

Дано: $d = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $l = 1{,}5$ м; $k = 3$; $\Delta x_3 = 12{,}6 \cdot 10^{-3}$ м.

Найти: λ.

Решение. Расстояние x_k от центра интерференционной картины до минимума каждого порядка определяется по формуле

$$x_{k\,\min} = \pm(2k - 1)\frac{l}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда длина волны λ будет равна:

$$\lambda = \frac{2dx_{k\,\min}}{(2k-1)l}; \; \lambda = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 1{,}5} = 6{,}72 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

34. Расстояние между двумя когерентными источниками d = = 0,9 мм. Источники посылают монохроматический свет с длиной волны 6400 Å на экран, расположенный от них на расстоянии 3,5 м. Определить число световых полос на 1 см длины.

Дано: $d = 0{,}9$ мм $= 9 \cdot 10^{-4}$ м; $\lambda = 6{,}400$ Å$= 6{,}4 \cdot 10^{-7}$ м; $L = 3{,}5$ м; $x = 10^{-2}$ м.

Найти: k/x.

Решение. В точке O на экране (рис. 45) будет максимальная освещенность. Так как точка O равноудалена от источников S_1' и S_2', то разность хода волн $S_1'O$ и $S_2'O$ равна нулю. В произвольной точке экрана O_k максимум освещенности будет наблюдаться, если разность хода лучей равна целому числу длин волн:

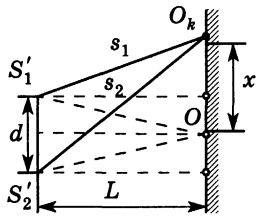


Рис. 45

$$\Delta = s_2 - s_1 = k\lambda. \qquad (1)$$

Разность хода лучей $\Delta = \dfrac{xd}{L}$.

Учитывая выражение (1), получим

$$\Delta = \frac{xd}{L} = k\lambda. \qquad (2)$$

Из выражения (2) можно определить искомую величину k/x — число светлых интерференционных полос на единицу длины

$$\frac{k}{x} = \frac{d}{L\lambda}.$$

Подставляя в это выражение числовые значения, получим

$$\frac{k}{x} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{3{,}5 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-7}} = 401\ (\text{м}^{-1}) \simeq 4\ (\text{см}^{-1}).$$

35. Найти угловое расстояние между соседними светлыми полосами в опыте Юнга, если известно, что экран отстоит от когерентных источников света на 1 м, а пятая светлая полоса на экране расположена на расстоянии 1,5 мм от центра интерференционной картины.

Дано: $L = 1$ м; $k = 5$; $l = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Найти: $\Delta\alpha_{max}$.

Решение. В точке O на экране (центр интерференционной картины) (рис. 46) будет максимальная освещенность, так как точка равноудалена от источников света S_1 и S_2 и разность

хода волн S_1O и S_2O равна нулю. В произвольной точке экрана O_k максимум освещенности будет наблюдаться, если разность хода волн $S_1O_k - S_2O_k$ равна целому числу длин волн:

$$\Delta = k\lambda. \qquad (1)$$

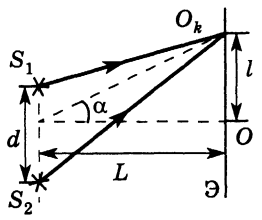


Рис. 46

Разность хода лучей

$$\Delta = \frac{ld}{L}. \qquad (2)$$

Приравниваем формулы (1) и (2):

$$\frac{ld}{L} = k\lambda,$$

откуда

$$l = \frac{kL\lambda}{d}. \qquad (3)$$

Угловое положение интерференционной полосы на экране определяется углом α. Из рис. 46 видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{L}$, или ввиду малости α

$$\alpha \approx \frac{l}{L}. \qquad (4)$$

Решая (3) и (4), находим

$$\alpha_{max} = \frac{k\lambda}{d}.$$

Угловое расстояние между соседними светлыми полосами

$$\Delta\alpha_{max} = k\frac{\lambda}{d} - (k-1)\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d}. \qquad (5)$$

Определяя $\frac{\lambda}{d}$ из уравнения (5) и подставляя это отношение в (3), получаем

$$\Delta\alpha_{max} = \frac{l}{kL};$$

$$\Delta\alpha_{max} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 1} = 3 \cdot 10^{-4}\ (\text{рад}).$$

36. Для устранения отражения света от поверхности линзы на нее наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления 1,25, меньшим, чем у стекла (просветление оптики). При какой наименьшей толщине пленки отражение света с длиной волны 0,72 мкм не будет наблюдаться, если угол падения лучей 60°?

Дано: $n = 1{,}25$; $\lambda = 0{,}72$ мкм $= 7{,}2 \cdot 10^{-7}$ м; $i = 60°$.

Найти: d_{min}.

Решение. Оптическая разность хода лучей, отраженных от нижней и верхней поверхностей пленки, равна

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}\,. \qquad (1)$$

В выражении (1) учтено, что отражение лучей на обоих поверхностях происходит от оптически более плотной среды и поэтому потери полуволны в обоих случаях компенсируют друг друга. Условие интерференционного минимума имеет вид

$$\Delta = \pm\frac{(2m-1)\lambda}{2},\ m = 1, 2,... \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и учитывая, что выражение (1) положительно, получим

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{(2m-1)\lambda}{2}. \qquad (3)$$

Из (3) найдем возможные значения толщины пленки:

$$d = \frac{(2m-1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \qquad (4)$$

Наименьшее значение толщины пленки будет при $m = 1$:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}. \qquad (5)$$

Подставляя в (5) числовые значения, получим

$$d_{\min} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-7}}{4\sqrt{1{,}25^2 - \sin^2 60^\circ}} = 2 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}) \simeq 0{,}2\ (\text{мкм}).$$

37. Постоянная дифракционной решетки 2,5 мкм. Определить наибольший порядок спектра, общее число главных максимумов в дифракционной картине и угол дифракции в спектре 2-го порядка при нормальном падении монохроматического света с длиной волны 0,62 мкм.

Дано: $c = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ м; $k = 2$; $\lambda = 6{,}2 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: $k_{\max}$, N, φ_2.

Решение. Условие максимума при дифракции на решетке $c\sin\varphi = k\lambda$, $\varphi_{k\max} = 90^\circ$; $\sin\varphi_{k\max} = 1$.

Тогда $k_{\max} = \frac{c}{\lambda}$; $k = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{6{,}2 \cdot 10^{-7}} = 4{,}03$, т. е. $= 4$. Общее число максимумов

$$N = 2k_{\max} + 1 = 9.$$

Угол дифракции φ_2 определяется по формуле $c\sin\varphi_2 = 2\lambda$, откуда

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\lambda}{c};$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{2 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-7}}{2{,}5 \cdot 10^{-6}} \simeq 0{,}5;$$

$$\varphi_2 = 30°.$$

38. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить дифракционная решетка с периодом 2,5 мкм шириной 1,5 см в спектре 3-го порядка для зеленых лучей ($\lambda = 0{,}5$ мкм)?

Дано: $c = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ м; $l = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м; $k = 3$; $\lambda = 0{,}5 \times 10^{-6}$ м.

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Разрешающая способность R дифракционной решетки — отношение длины волны λ к разности $\Delta\lambda$ длин волн

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

R вычисляется по формуле

$$R = kN,$$

где k — порядок максимума в спектре, N — число щелей на решетке $N = \frac{l}{c}$, где l — ширина решетки, c — период решетки. Тогда

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k\frac{l}{c},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda c}{kl}; \Delta\lambda = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}} \simeq 2{,}8 \cdot 10^{-11}\ (\text{м}).$$

39. На дифракционную решетку с периодом 2 мкм нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Какую разность длин волн может разрешить эта решетка в области красного света ($\lambda_1 = 0{,}7$ мкм) в спектре второго порядка, если ширина решетки 2,5 см? На какую длину волны в спектре второго порядка накладывается синяя линия ($\lambda_2 = 0{,}447$ мкм) спектра третьего порядка?

Дано: $k_2 = 2$; $k_3 = 3$; $l = 2{,}5$ см $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м; $c = 2$ мкм $= 2 \cdot 10^{-6}$ м; $\lambda_1 = 0{,}7$ мкм $= 7 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_2 = 0{,}447$ мкм $= 4{,}47 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: $\Delta\lambda$, λ_3.

Решение. Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \qquad (1)$$

где N — общее число щелей решетки, k — порядок спектра.

Период решетки $c = \frac{1}{N_0}$, где N_0 — число щелей на 1 м длины. Зная ширину l дифракционной решетки, находим общее число щелей решетки:

$$N = N_0 l = \frac{l}{c}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) с учетом (2) находим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{kN} = \frac{\lambda c}{kl}; \qquad (3)$$

$$\Delta\lambda = \frac{7 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}8 \cdot 10^{-11}\ (\text{м}).$$

Направления на главные максимумы дифракционной решетки определяются условием $c\sin\varphi = k\lambda$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — порядок спектра, φ — угол между направлением на дифракционный максимум и нормалью к решетке. При наложении спектральных линий выполняется условие:

$c\sin\varphi = k_2\lambda_2$, $c\sin\varphi = k_3\lambda_3$ или $k_2\lambda_2 = k_3\lambda_3$, откуда

$$\lambda_3 = \frac{k_2\lambda_2}{k_3}, \quad \lambda_3 = \frac{2 \cdot 4{,}47 \cdot 10^{-7}}{3} = 2{,}98 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

40. Дифракционная решетка содержит 200 штрихов на каждый миллиметр. На решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны 5750 Å. Определить наибольший порядок спектра и общее число главных максимумов в дифракционной картине.

Дано: $N = 200$; $\lambda = 5750$ Å $= 5{,}75 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: k_{max}, n.

Решение. Число штрихов на единицу длины N и постоянная дифракционной решетки c связаны обратной пропорциональной зависимостью:

$$c = \frac{1}{N}; \quad c = \frac{1}{200}\ (\text{мм}) = 5 \cdot 10^{-6}\ (\text{м}).$$

Для дифракционных максимумов, полученных с помощью дифракционной решетки, справедливо соотношение

$$c\sin\varphi = k\lambda.$$

Число главных максимумов, даваемых решеткой, k_{max} вычислим, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей не может превышать 90°. Из соотношения $c\sin\varphi = k\lambda$ получим:

$$k_{max} = \frac{c\sin\varphi_{max}}{\lambda}.$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$k_{max} = \frac{5\cdot10^{-6}\cdot1}{5{,}75\cdot10^{-7}} \simeq 8{,}7.$$

Число k_{max} должно быть целым. Оно не может принять значение, равное 9, так как при этом значении $\sin\varphi$ должен быть больше 1, что невозможно. Следовательно, $k_{max} = 8$.

Определим общее число главных максимумов n. Учитывая, что влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу главных максимумов, равному $2k_{max}$, а также центральный нулевой максимум, получим:

$$n = 2k_{max} + 1 = 17.$$

41. Дифракционная решетка шириной 12 мм содержит 4800 штрихов. Определить число главных максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки для длины волны 0,55 мкм.

Дано: $h = 12$ мм $= 1{,}2\cdot10^{-2}$ м; $N = 4800$; $\lambda = 0{,}55$ мкм $= 5{,}5\cdot10^{-7}$ м.

Найти: n.

Решение. Период решетки c определяется по формуле

$$c = \frac{h}{N};\ c = \frac{1{,}2\cdot10^{-2}}{4800} = 2{,}5\cdot10^{-6}\ (\text{м}).$$

Условие максимумов при дифракции на решетке

$$c\ \sin\varphi = k\lambda.$$

Максимальный угол отклонения $\varphi = 90°$, для которого

$$c = k_{max}\lambda, \text{ откуда } k_{max} = \frac{c}{\lambda};\ k_{max} = \frac{2{,}5\cdot10^{-6}}{0{,}55\cdot10^{-6}} \simeq 4{,}5,$$

т. е. значение $k_{max} = 4$, а общее число главных максимумов $n = 2k_{max} + 1 = 9$.

42. На дифракционную решетку с периодом 4,8 мкм падает нормально естественный свет. Какие спектральные линии, соответствующие длинам волн в видимой области спектра, будут совпадать в направлении под углом 30°?

Дано: $c = 4{,}8$ мкм; $\varphi = 30°$.

Найти: λ_i.

Решение. Условие максимумов при дифракции на решетке выражается формулой

$$c \sin \varphi = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Отсюда $$\lambda = \frac{c \sin \varphi}{k} = \frac{4{,}8 \cdot 0{,}5}{k} = \frac{2{,}4}{k}.$$

По оценке из видимой области спектра (λ от 0,38 до 0,76 мкм) в направлении $\varphi = 30°$ совпадут линии с длинами волн:

$$\lambda_1 = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6 \text{ (мкм) при } k = 4,$$

$$\lambda_2 = \frac{2{,}4}{5} = 0{,}48 \text{ (мкм) при } k = 5,$$

$$\lambda_3 = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4 \text{ (мкм) при } k = 6.$$

43. Период дифракционной решетки 0,005 мм. Определить число наблюдаемых главных максимумов в спектре для длины волны 0,445 мкм.

Дано: $c = 5 \cdot 10^{-6}$ м; $\lambda = 4{,}45 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: N.

Решение. Условие максимумов при дифракции на решетке $c \sin \varphi = k\lambda$. Предельный угол φ равен 90°, $\sin 90° = 1$. Тогда $k_{\max} = \frac{c \sin \varphi}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}$; $k_{\max} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4{,}45 \cdot 10^{-7}} \simeq 11$, а общее число главных максимумов $N = 2k_{\max} + 1 = 23$.

44. Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен на расстоянии 1 м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между экраном и источником помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком наименьшем диаметре отверстия центр дифракционной картины будет темным?

Дано: $r_0 = 1$ м; $a = b = \frac{r_0}{2} = 0{,}5$ м; $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

Найти: $d_{\min}$.

Решение. На экране (рис. 47) центр дифракционной картины в точке O будет темным, если на отверстии d уместится минимальное четное число зон Френеля, т. е. $m = 2$. Радиус зон Френеля определяется по формуле

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} \cdot m\lambda}.$$

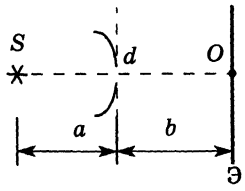


Рис. 47

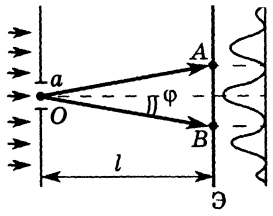


Рис. 48

Радиус 2-й зоны Френеля будет

$$r_2 = \sqrt{\frac{0{,}5^2}{1} \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}) = 0{,}5\ (\text{мм}).$$

Значит, $d_{\min} = 2r_2 = 1$ (мм).

45. Свет от монохроматического источника ($\lambda = 0{,}6$ мкм) падает нормально на диафрагму с круглым отверстием $r = 0{,}6$ мм. Темным или светлым будет центр дифракционной картины на экране, находящемся на расстоянии $b = 0{,}3$ м от диафрагмы?

Дано: $\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м; $r = 0{,}6$ мм $= 6 \cdot 10^{-4}$ м; $b = 0{,}3$ м.

Найти: m.

Решение. Радиусы зон Френеля, на которые следует разбить отверстие, чтобы определить их число, определяются по формуле

$r_m = \sqrt{m\lambda b}$, где m — номер зоны, λ — длина волны, b — расстояние от диафрагмы до экрана. Из этой формулы

$$m = \frac{r_m^2}{b\lambda};\ m = \frac{36 \cdot 10^{-8}}{0{,}3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 2.$$

Число зон четное, следовательно, центр картины на экране будет темным.

46. На узкую щель шириной 0,1 мм падает нормально плоская монохроматическая волна ($\lambda = 0{,}585$ мкм). Найти расстояние между первыми дифракционными минимумами на экране, удаленном от щели на 0,6 м.

Дано: $a = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м; $\lambda = 0{,}585$ мкм $= 5{,}85 \cdot 10^{-7}$ м; $l = 0{,}6$ м; $k = 1$.

Найти: x.

Решение. На рис. 48 искомая величина $x = AB$, стрелками OA и OB показаны направления на 1-й дифракционный минимум. Из рисунка видно, что

$$\frac{x}{2} = l\operatorname{tg}\varphi,\ \text{а}\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{2l}.$$

Условие минимума при дифракции на щели:

$$a \sin \varphi = k\lambda,$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{a}.$$

Для малых углов $\operatorname{tg} \varphi \simeq \sin \varphi$ и тогда

$$\frac{x}{2l} = \frac{k\lambda}{a},$$

откуда

$$x = \frac{2lk\lambda}{a};\ x = \frac{2 \cdot 0{,}6 \cdot 1 \cdot 5{,}85 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} \simeq 7 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}) = 7\ (\text{мм}).$$

47. На дифракционную решетку Д (рис. 49) нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм. На экране Э, расположенном параллельно решетке и отстоящем от нее на расстояние 0,5 м, наблюдается дифракционная картина. Расстояние между дифракционными максимумами первого порядка равно 10 см. Определить постоянную дифракционной решетки и общее число главных максимумов, получаемых с помощью этой решетки.

Дано: $\lambda = 6{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $L = 0{,}5$ м; $l = 0{,}1$ м; $k = 1$.

Найти: c, n.

Решение. Запишем условие главных максимумов дифракционной решетки:

$$c \sin \varphi = k\lambda. \qquad (1)$$

По условию задачи $k = 1$. Учитывая, что $\frac{l}{2} \ll L$ (см. рис. 49), имеем

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2L}. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим

$$\frac{cl}{2L} = \lambda \text{ или } c = \frac{2\lambda L}{l}. \qquad (3)$$

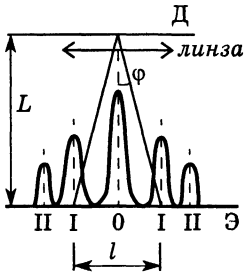


Рис. 49

Подставляя числовые значения величин, находим

$$c = \frac{2 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 0{,}5}{0{,}1} =$$

$$= 6{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м} = 6{,}5\ (\text{мкм}).$$

Для определения общего числа главных максимумов, даваемых дифракционной решеткой, исходим из условия, что максимальный угол отклонения лучей от

нормального направления распространения не может превышать 90°, т. е. $\sin 90° = 1$, тогда формула (1) примет вид

$$k_{max} = \frac{c}{\lambda}.$$

Производим вычисления:

$$k_{max} = \frac{6{,}5 \cdot 10^{-6}}{6{,}5 \cdot 10^{-7}} = 10.$$

Общее число максимумов равно $n = 2k_{max} + 1$, т. е. влево и вправо от центрального максимума будут наблюдаться по k_{max} максимумов:

$$n = 2 \cdot 10 + 1 = 21.$$

48. Постоянная дифракционной решетки 10 мкм, ее ширина 2 см. В спектре какого порядка эта решетка может разрешить дублет $\lambda_1 =$ $= 486$ нм и $\lambda_2 = 486{,}1$ нм?

Дано: $c = 10$ мкм $= 10^{-5}$ м; $l = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м; $\lambda_1 =$ $= 486$ нм $= 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_2 = 486{,}1$ нм $= 4{,}861 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: m.

Решение. Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN, \qquad (1)$$

где $\Delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий λ и $\lambda + \Delta\lambda$, разрешаемых решеткой, m — порядок спектра, N — число щелей решетки.

Поскольку постоянная решетки c есть расстояние между серединами соседних щелей, то общее число щелей можно найти как

$$N = \frac{l}{c}, \qquad (2)$$

где l — ширина решетки.

Из формулы (1) с учетом (2) находим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN} = \frac{c\lambda}{ml}. \qquad (3)$$

Дублет спектральных линий λ_1 и λ_2 будет разрешен, если

$$\lambda \leqslant \lambda_2 - \lambda_1. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (3) в (4) и учитывая, что $\lambda = \lambda_1$, получим

$$\frac{c\lambda_1}{ml} \leqslant \lambda_2 - \lambda_1. \qquad (5)$$

Из выражения (5) следует, что дублет λ_1 и λ_2 будет разрешен во всех спектрах с порядком

$$m \geqslant \frac{c\lambda_1}{l(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Подставляя числовые данные, получим

$$\frac{c\lambda_1}{l(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{10^{-5} \cdot 4{,}86 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot (4{,}861 - 4{,}86) \cdot 10^{-7}} = 2{,}43.$$

Поскольку m — целое число, то, следовательно,

$$m \geqslant 3.$$

49. Определить расстояние между атомными плоскостями в кристалле каменной соли, если дифракционный максимум первого порядка наблюдается при падении рентгеновских лучей с длиной волны 0,147 нм под углом 15°12′ к поверхности кристалла.

Дано: $\lambda = 0{,}147$ нм $= 1{,}47 \cdot 10^{-10}$ м; $\theta = 15°12'$; $k = 1$.

Найти: d.

Решение. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах — это результат интерференции рентгеновского излучения, зеркально отражающегося от системы параллельных плоскостей, которые проходят через узлы — атомы (например, A (рис. 50)) кристаллической решетки. Эти плоскости называют атомными. Отражение наблюдается лишь в тех направлениях, соответствующих дифракционным максимумам, которым удовлетворяет соотношение

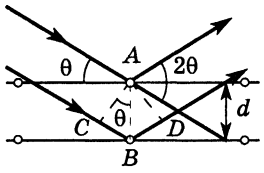


Рис. 50

$$\Delta = |BC| + |BD| = 2d \sin\theta \text{ или } 2d \sin\theta = k\lambda, \qquad (1)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$ — порядок дифракционного максимума, θ — угол скольжения, т. е. угол между падающим лучом и плоскостью кристалла, d — расстояние между соседними плоскостями, называемое межплоскостным.

Исходя из условия (1) и учитывая, что $k = 1$, имеем

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta};\ d = \frac{1{,}47 \cdot 10^{-10}}{2\sin 15°12'} \simeq 2{,}8 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}) = 0{,}28\ (\text{нм}).$$

50. Расстояние между атомными плоскостями кристалла кальция равно 0,3 нм. Определить, при какой длине волны рентгеновского излучения второй дифракционный максимум будет наблюдаться при отражении лучей под углом 30° к поверхности кристалла.

Дано: $d = 0{,}3$ нм $= 3 \cdot 10^{-10}$ м; $k = 2$; $\theta = 30°$.

Найти: λ.

Решение. Формула Вульфа—Брэгга определяет условие максимума при дифракции на пространственной решетке.

$$2d \sin \theta = k\lambda,$$

откуда $$\lambda = \frac{2d \sin\theta}{k};$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}5}{2} = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

51. Естественный свет падает на кристалл алмаза под углом полной поляризации. Найти угол преломления света ($n = 2{,}42$).

Дано: $n_1 = 1$; $n_2 = 2{,}42$.

Найти: γ.

Решение. При падении естественного света на поверхность под углом $i_Б$ полной поляризации отраженный луч будет полностью поляризован. По закону Брюстера $\operatorname{tg} i_Б = \frac{n_2}{n_1}$ равен отношению показателей преломления алмаза и воздуха, и угол между отраженным и преломленным лучами равен 90°. Поэтому $\operatorname{tg} i_Б = 2{,}42$ и $i_Б = 67°30'$, а из рис. 51 видно, что угол преломления $\gamma = 180° - 90° - i_Б = 22°30'$.

52. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы свет, отраженный от поверхности воды, был максимально поляризован? ($n_в = 1{,}33$.)

Дано: $n_в = 1{,}33$; $n_1 = 1$.

Найти: α.

Решение. По закону Брюстера

$$\operatorname{tg} i_Б = \frac{n_в}{n_1} = n_в = 1{,}33;\ i_Б = 53°,$$

где $n_в$ и n_1 — показатели преломления воды и воздуха. Тогда, как следует из рис. 52, $\alpha = 90° - i_Б = 37°$.

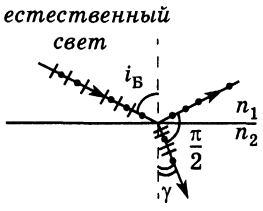


Рис. 51

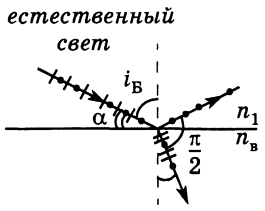


Рис. 52

53. Интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор, уменьшилась в 2,3 раза. Во сколько раз она уменьшится, если за первым поставить второй такой же поляризатор так, чтобы угол между их главными плоскостями был равен 60°?

Дано: $I_0/I_1 = 2{,}3$; $\alpha = 60°$.

Найти: I_0/I_2.

Решение. Естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных волн, поляризованных во взаимно-перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность. Идеальный поляризатор пропускает колебания, параллельные его главной плоскости, и полностью задерживает колебания, перпендикулярные этой плоскости. На выходе из первого поляризатора получается плоскополяризованный свет, интенсивность которого I_1 с учетом потерь на отражение и поглощение света поляризатором равна

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1 - k). \tag{1}$$

После прохождения второго поляризатора интенсивность света уменьшается как за счет отражения и поглощения света поляризатором, так и из-за несовпадения плоскости поляризации света с главной плоскостью поляризатора. В соответствии с законом Малюса и с учетом потерь на отражение и поглощение света эта интенсивность равна

$$I_2 = I_1(1 - k)\cos^2\alpha, \tag{2}$$

где α — угол между плоскостью поляризации света, которая параллельна главной плоскости первого поляризатора, и главной плоскостью второго поляризатора.

Найдем, во сколько раз уменьшилась интенсивность света:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1 - k)\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Выразим из (1)

$$1 - k = \frac{2I_1}{I_0}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{2\cos^2\alpha}\left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2. \tag{5}$$

Проводя вычисления, найдем

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{2\cos^2 60°}\,2{,}3^2 \simeq 10{,}6.$$

54. Естественный свет падает на поверхность диэлектрика под углом полной поляризации. Степень поляризации преломленного луча составляет 0,124. Найти коэффициент пропускания света.

Дано: $P'' = 0{,}124$.

Найти: τ.

Решение. Естественный свет можно представить как наложение двух некогерентных волн, поляризованных во взаимно-перпендикулярных плоскостях и имеющих одинаковую интенсивность

$$I_{\parallel} = I_{\perp}, \tag{1}$$

где индексы $\parallel$ и $\perp$ обозначают колебания, параллельные и перпендикулярные плоскости падения света на поверхность диэлектрика, причем интенсивность падающего света

$$I = I_{\parallel} + I_{\perp}. \tag{2}$$

При падении света под углом полной поляризации отражаются только волны, поляризованные в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. В преломленной волне преобладают колебания, параллельные плоскости падения. Интенсивность преломленной волны можно записать как

$$I'' = I''_{\parallel} + I''_{\perp}. \tag{3}$$

Составляющие $I''_{\parallel}$ и $I''_{\perp}$ интенсивности преломленной волны равны

$$I''_{\parallel} = I_{\parallel} \text{ и } I''_{\perp} = I_{\perp} - I', \tag{4}$$

где I' — интенсивность отраженного света.

Степень поляризации преломленного луча

$$P'' = \frac{I''_{\parallel} - I''_{\perp}}{I''_{\parallel} + I''_{\perp}} = \frac{I''_{\parallel} - I''_{\perp}}{I''}. \tag{5}$$

С учетом равенств (4) и (1) выражение (5) можно представить в виде

$$P'' = \frac{I'}{I''}. \tag{6}$$

Коэффициент пропускания света определяется как

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{I''}{I' + I''} \tag{7}$$

или с учетом выражения (6)

$$\tau = \frac{1}{1 + P''}. \tag{8}$$

Проведя вычисления, получим

$$\tau = \frac{1}{1 + 0{,}124} \simeq 0{,}89.$$

55. Какой угол образуют плоскости поляризации двух николей, если свет, вышедший из второго николя, был ослаблен в 5 раз? Учесть, что поляризатор поглощает 10, а анализатор 8% падающего на них света.

Дано: $n = 5$; $k_1 = 0{,}1$; $k_2 = 0{,}08$.

Найти: φ.

Решение. Естественный луч света, падая на грань призмы николя, претерпевает двойное лучепреломление. В результате возникают два луча: обыкновенный и необыкновенный. Оба луча поляризованы во взаимно-перпендикулярных плоскостях, интенсивность их одинакова и равна половине интенсивности естественного света. Интенсивность света, прошедшего через первую призму (поляризатор) с учетом поглощения, равна

$$I_1 = \frac{I_0}{2}(1 - k_1), \qquad (1)$$

где I_0 — интенсивность естественного света, падающего на первый николь, $k_1 = 0{,}1$ — относительная потеря интенсивности света в поляризаторе.

Поляризованный свет, попадая на вторую призму (анализатор), вновь испытывает поглощение, но, кроме этого, его интенсивность уменьшается из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора. Уменьшение интенсивности определяется законом Малюса

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi.$$

Учитывая потери интенсивности света в анализаторе, имеем

$$I_2 = \frac{I_0}{2}(1 - k_1)(1 - k_2)\cos^2 \varphi, \qquad (2)$$

где $k_2 = 0{,}08$ — относительная потеря интенсивности в анализаторе, φ — угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора.

Так как по условию задачи известно, что относительное уменьшение интенсивности света $n = \frac{I_0}{I_2}$, то, подставив выражение (2), получим

$$n = \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - k_1)(1 - k_2)\cos^2 \varphi}. \qquad (3)$$

Из соотношения (3) получим $\cos^2\varphi = \dfrac{2}{n(1-k_1)(1-k_2)}$.

Подставляя данные, проводим вычисления

$$\cos^2\varphi = \frac{2}{5\cdot 0{,}9\cdot 0{,}92} \simeq 0{,}483,$$

следовательно, искомый угол $\varphi = 46°$.

56. Угол между плоскостями поляризации двух поляроидов 70°. Как изменится интенсивность прошедшего через них света, если этот угол уменьшить в 5 раз?

Дано: $\alpha_1 = 70°$; $\alpha_2 = 14°$.

Найти: I_2/I_1.

Решение. После прохождения света через оба поляроида его интенсивность I будет $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha$. Тогда

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha_1;\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha_2;\ \frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_1};$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\cos^2 14°}{\cos^2 70°} = \frac{0{,}942}{0{,}117} \simeq 8,$$

т. е. интенсивность возрастет в 8 раз.

57. Луч света, проходя слой льда, падает на алмазную пластинку, частично отражается, частично преломляется. Определить, каким должен быть угол падения, чтобы отраженный луч был максимально поляризован.

Дано: $n_1 = 1{,}31$; $n_2 = 2{,}42$.

Найти: i_0.

Решение. Отраженный свет максимально поляризован при угле падения $i = i_0$, удовлетворяющем закону Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_0 = n_{21}, \qquad (1)$$

где $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$ — относительный показатель преломления отражающей среды.

Если $i = i_0$, то отраженный и преломленный лучи взаимно-перпендикулярны. Проходящий свет поляризован лишь частично. Из выражения (1) находим

$$i_0 = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1};\ i_0 = \operatorname{arctg}\frac{2{,}42}{1{,}31} = 61{,}5°.$$

58. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол 45°. Каждый николь поглощает 8% света, падающего на него (рис. 53).

Дано: $\alpha = 45°$; $k = 0{,}08$.

Найти: I_0/I_2.

Решение. В результате двойного лучепреломления естественный луч света, попадая в призму П — поляризатор, раздваивается на обыкновенный и необыкновенный лучи. Оба луча поляризованы, но во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Обыкновенный луч, подчиняясь закону преломления, преломится и, подойдя к слою канадского бальзама в николе, испытает полное отражение и поглотится зачерненной боковой гранью призмы. Необыкновенный луч проходит через призму без отклонения, интенсивность его уменьшается из-за поглощения света призмой на величину kI_0.

Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна

$$I_1 = 0{,}5(1 - k)I_0, \qquad (1)$$

где k = 0,08 (т. е. 8%) — коэффициент поглощения света в призме, I_0 — интенсивность естественного света, падающего на поляризатор.

Поляризованный свет, войдя во второй николь — анализатор А, опять поглощается, и интенсивность его уменьшается на величину Ik_0; кроме того, интенсивность поляризованного света из-за несовпадения плоскостей поляризации поляризатора и анализатора, согласно закону Малюса:

$$I_2 = I_1(1 - k)\cos^2\alpha, \qquad (2)$$

где α — угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора, k — коэффициент поглощения, I_1 — интенсив-

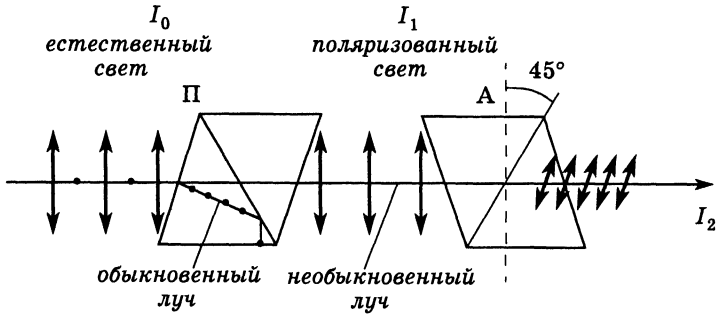


Рис. 53

ность поляризованного света, падающего на анализатор, I_2 — интенсивность поляризованного света, прошедшего через анализатор.

Подставляя выражение (1) в (2), имеем

$$I_2 = 0{,}5(1 - k)^2 I_0 \cos^2 \alpha. \qquad (3)$$

Из соотношения (3) следует

$$\frac{I_2}{I_0} = 0{,}5(1 - k)^2 \cos^2 \alpha, \text{ а } \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0{,}5(1 - k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\frac{I_2}{I_0} = 0{,}5(1 - 0{,}08)^2 \cos^2 45° = 0{,}21; \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0{,}21} \simeq 4{,}7.$$

59. Раствор сахара с концентрацией 0,25 г/см^3 толщиной 20 см поворачивает плоскость поляризации монохроматического света на 30°20′. Другой раствор толщиной 15 см поворачивает плоскость поляризации на 20°. Определить концентрацию сахара во втором растворе.

Дано: $c_1 = 0{,}25$ г/см^3; $l_1 = 20$ см; $\varphi_1 = 30{,}3°$; $l_2 = 15$ см; $\varphi_2 = 20°$.

Найти: c_2.

Решение. Угол поворота плоскости поляризации определяется по формуле

$$\varphi = [\alpha] c l,$$

где $[\alpha]$ — удельное вращение. $\varphi_1 = [\alpha] c_1 l_1$, отсюда $[\alpha] = \frac{\varphi_1}{c_1 l_1}$. $\varphi_2 = [\alpha] c_2 l_2$, откуда

$$c_2 = \frac{\varphi_2}{[\alpha] l_2} = \frac{\varphi_2 c_1 l_1}{\varphi_1 l_2};$$

$$c_2 = \frac{20 \cdot 0{,}25 \cdot 20}{30{,}33 \cdot 15} \simeq 0{,}22 \text{ (г/см}^3\text{)}.$$

60. Измерение дисперсии показателя преломления оптического стекла дало $n_1 = 1{,}528$ для $\lambda_1 = 0{,}434$ мкм и $n_2 = 1{,}523$ для $\lambda_2 = 0{,}486$ мкм. Вычислить отношение групповой скорости к фазовой для света с длиной волны 0,434 мкм.

Дано: $\lambda_1 = 0{,}434$ мкм $= 4{,}34 \cdot 10^{-7}$ м; $n_1 = 1{,}528$; $\lambda_2 = 0{,}486$ мкм $= 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м; $n_2 = 1{,}523$.

Найти: u_1/v_1.

Решение. Зависимость групповой скорости u от показателя преломления n и длины волны λ имеет вид

$$u = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \qquad (1)$$

Фазовая скорость v определяется как

$$v = \frac{c}{n}. \qquad (2)$$

Разделив выражение (1) на (2), получим

$$\frac{u}{v} = 1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}. \qquad (3)$$

Для длины волны λ_1 и средней дисперсии $\left\langle \frac{dn}{d\lambda} \right\rangle = \frac{\Delta n}{\Delta\lambda}$ имеем

$$\frac{u_1}{v_1} = 1 + \frac{\lambda_1}{n_1}\left(\frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right). \qquad (4)$$

Подставляя в (4) числовые значения, получим

$$\frac{u_1}{v_1} = 1 + \frac{4{,}34 \cdot 10^{-7} \cdot (1{,}523 - 1{,}528)}{1{,}528 \cdot (4{,}86 - 4{,}34) \cdot 10^{-7}} \simeq 0{,}973.$$

61. Дисперсия показателя преломления кварца представлена таблицей:

l, нм	589,3	486,1	410,0
n	1,5442	1,5497	1,5565

Найти: отношение фазовой и групповой скоростей света вблизи $\lambda = 486{,}1$ нм.

Решение. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v света в среде отношением

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Учитывая, что $v = \frac{c}{n}$, из (1) получаем

$$u = v\left[1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right].$$

Или для средней дисперсии вещества

$$u = v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\right), \qquad (2)$$

где $\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}$ — средняя дисперсия показателя преломления среды. Из таблицы для $\lambda = 486{,}1$ нм и $n = 1{,}5497$ находим относительную дисперсию:

$$\frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda} = \frac{4861(1{,}5565 - 1{,}5442)}{1{,}5497(4100 - 5893)} \simeq -0{,}0215.$$

Тогда из (2) получим

$$u = v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\right) = v(1 - 0{,}0215) = 0{,}9785v,$$

$$\frac{u}{v} = 0{,}9785.$$

62. Показатель преломления сероуглерода для света с длинами волн 509, 534 и 589 нм равен соответственно 1,647, 1,640 и 1,630. Вычислить фазовую и групповую скорости света вблизи длины волны 534 нм.

Решение. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v света в среде соотношением

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Учитывая, что $v = \frac{c}{n}$, из (1) получаем $u = v\left[1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right]$. Для средней дисперсии вещества имеем

$$u = v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\right). \qquad (2)$$

Для $\lambda = 534$ нм и $n = 1{,}640$ находим относительную дисперсию

$$\frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda} = \frac{535(1{,}647 - 1{,}630)}{1{,}640(509 - 589)} \simeq -0{,}069.$$

Из соотношения (2) определяем

$$\frac{u}{v} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}\right) = (1 - 0{,}069) = 0{,}931,\ u = 0{,}931v. \qquad (3)$$

Учитывая, что фазовая скорость $v = c/n$, находим ее значение вблизи $\lambda = 534$ нм:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}640} \simeq 1{,}83 \cdot 10^8\ (\text{м/с}).$$

По формуле (3) вычисляем групповую скорость

$$u = 0{,}931 \cdot 1{,}83 \cdot 10^8\ (\text{м/с}) \simeq 1{,}70 \cdot 10^8\ (\text{м/с}).$$

63. В черенковском счетчике из каменной соли релятивистские протоны излучают в конусе с раствором 82°. Определить кинетическую энергию протонов. Показатель преломления каменной соли 1,54.

Дано: $2\theta = 82°$; $n = 1{,}54$.

Найти: T.

Решение. Излучение Вавилова—Черенкова возникает, когда скорость движения v заряженной частицы в среде больше фазовой скорости света c/n в этой среде (c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления среды). Излучение направлено вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением движения частицы. Угол θ между направлением излучения и направлением движения частицы определяется формулой

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется как

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right), \qquad (2)$$

где $E_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы; m — масса.

Для протонов $E_0 = 938{,}28$ МэВ. Отношение v/c определим из (1):

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n\cos\theta}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$T = E_0\left(\frac{n\cos\theta}{\sqrt{n^2\cos^2\theta - 1}} - 1\right). \qquad (4)$$

Проводя вычисления, найдем

$$T = 938{,}28\left(\frac{1{,}54\cos 41°}{\sqrt{(1{,}54\cos 41°)^2 - 1}} - 1\right) = 902{,}9 \text{ (МэВ)}.$$

64. При каких значениях кинетической энергии протона будет наблюдаться черенковское излучение, если протон движется с постоянной скоростью в среде с показателем преломления 1,6?

Дано: $n = 1{,}6$.

Найти: $T_ч$.

Решение. Для возникновения черенковского излучения необходимо, чтобы скорость движения заряженной частицы в среде была больше фазовой скорости света в этой среде: $v > \frac{c}{n}$.

Выразим кинетическую энергию протона через показатель преломления среды:

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = E_0\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right),$$

где $E_0 = 938{,}28$ МэВ — энергия покоя протона, m — масса протона.

Черенковское излучение возникает при

$$T_ч > T = E_0\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right).$$

Тогда

$$T_ч = 938{,}28\left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2-1}} - 1\right) = 267{,}68 \text{ (МэВ)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. На какую длину волны настроен колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью 445 пФ и катушки с индуктивностью 1 мГн? **Ответ**: 1257 м.

2. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур с индуктивностью 1 мГн, если изменять емкость от 50 до 500 пФ? **Ответ**: от 421 до 1332 м.

3. Катушку с какой индуктивностью надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости 0,5 мкФ получить излучение с частотой 1 мГц? **Ответ**: 0,05 Гн.

4. Катушка с индуктивностью 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 0,01 м^2 и зазором между ними 0,1 мм, заполненном диэлектриком. Контур настроен на длину волны 750 м. Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика. **Ответ**: 6.

5. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 25 нФ и катушки с индуктивностью 1,015 Гн. Заряд на обкладках конденсатора 2,5 мкКл. Написать уравнение изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора и тока в катушке. Найти их значения в момент времени, равный половине периода колебаний. **Ответ**: $U = 100\cos(2\pi \cdot 10^3 t)$ (В); $I = -15{,}7 \cdot 10^{-3}\sin(2\pi \cdot 10^3 t)$ (А); $U_1 = -100$ В; $I_1 = 0$.

6. В точках A и B, расположенных на расстояниях 3 и 2,4 м от точки C, находятся два источника гармонических колебаний. Амплитуды колебаний равны соответственно 16 и 12 см, начальные

фазы 30 и 90°, частота колебаний одинакова, длина волны равна 3,6 м. Найти амплитуду результирующего колебания точки C. **Ответ**: 14,4 см.

7. Скорость распространения электромагнитных волн в среде $2{,}6 \cdot 10^8$ м/с. Определить длину волны в этой среде, если частота волн в вакууме равна 1 МГц. **Ответ**: 260 м.

8. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью 100 пФ и катушку индуктивностью 1 мГн. Определить длину электромагнитной волны, излучаемой контуром. **Ответ**: 596 м.

9. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электрического поля которой равна 20 В/м. Найти амплитудное значение напряженности магнитного поля волны. **Ответ**: $5{,}3 \cdot 10^{-2}$ А/м.

10. Через площадку 30 см^2 в направлении, ей перпендикулярном, распространяется плоская электромагнитная волна, амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей которой 0,01 В/м и 1 мА/м. Какая энергия переносится волной через эту площадку за время 10 мин? Период волны $T \ll t$. **Ответ**: $9 \cdot 10^{-6}$ Дж.

11. На пути одного из интерферирующих лучей в опыте Юнга помещают тонкую стеклянную ($n = 1{,}52$) пластинку толщиной 2,6 мкм. Луч света падает на пластинку перпендикулярно. На сколько светлых полос смещается интерференционная картина на экране, если длина световой волны 0,676 мкм? **Ответ**: на 2.

12. При какой наименьшей толщине тонкой пленки из бензола ($n = 1{,}5$) при освещении белым светом под углом 30° пленка кажется желтой ($\lambda = 0{,}59$ мкм) в отраженном свете? **Ответ**: 0,1 мкм.

13. На тонкий стеклянный клин ($n = 1{,}5$) нормально падает монохроматический свет с длиной волны 668 нм. Определить преломляющий угол клина, если линейное расстояние между темными полосами 1,4 мм. **Ответ**: 33″.

14. На каком максимальном расстоянии от диафрагмы с круглым отверстием радиусом 0,6 мм надо поместить экран, чтобы при освещении отверстия плоской световой волной ($\lambda = 0{,}6$ мкм) в центре дифракционной картины на экране еще наблюдалось темное пятно? Под каким углом при этом видно отверстие из точки наблюдения? **Ответ**: 0,3 м; 13,7′.

15. На щель шириной 12λ падает нормально монохроматический свет. Найти угол между направлениями на второй и третий максимумы интенсивности света. **Ответ**: 5°.

16. На дифракционную решетку с периодом 2 мкм нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Най-

ти линейное расстояние между желтой ($\lambda_1 = 0{,}588$ мкм) и зеленой ($\lambda_2 = 0{,}5$ мкм) линиями в спектре второго порядка, если экран находится на расстоянии 1 м от дифракционной решетки. **Ответ**: 15 см.

17. Найти коэффициент поглощения света в поляроидах, если при угле 45° между их плоскостями поляризации через систему проходит 16% падающего света. **Ответ**: 0,2.

18. Во сколько раз изменится интенсивность света, проходящего через два николя, угол между главными направлениями которых составляет 60°, если между ними поместить пластинку левовращающегося кварца толщиной 3 мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси. Такая же пластинка, но толщиной 1,5 мм, поворачивает плоскость поляризации на 25°. Потерями света в николях и кварце пренебречь. **Ответ**: уменьшится в 17,1 раза.

19. Какова наименьшая толщина мыльной пленки, если при наблюдении под углом 30° к поверхности мыльной пленки в отраженном свете она окрашивается в фиолетовый цвет? Значение $\lambda = 0{,}4$ мкм. **Ответ**: 83 нм.

20. На дифракционную решетку, имеющую 500 штрихов на 1 мм, падает свет с длиной волны 600 нм. Определить наибольший порядок спектра, который можно получить данной решеткой. **Ответ**: 3.

21. Угол между спектрами вторых порядков равен 36°. Определить длину волны света, падающего на дифракционную решетку с $c = 4$ мкм. **Ответ**: $\lambda = 618$ нм.

22. Найти угол полной поляризации при отражении от черного зеркала. Показатель преломления его $n = 1{,}327$. **Ответ**: 53°.

23. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы поляризация солнечного света, отраженного от поверхности воды, была максимальной? **Ответ**: $\alpha = 37°$.

24. Определить показатель преломления стекла, если при отражении света от этого стекла отраженный свет будет полностью поляризован при угле преломления 30°. **Ответ**: $n = 1{,}73$.

25. Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении его через два николя, плоскости поляризации которых составляют 60°? **Ответ**: 8.

ЧАСТЬ 5

Квантовая природа излучения

Основные уравнения и формулы

- Закон Стефана—Больцмана $R = \sigma T^4$

  где R — энергетическая светимость черного тела,
  T — термодинамическая температура тела,
  σ — постоянная Стефана—Больцмана.

- Закон смещения Вина $\lambda_{max} = \frac{b}{T}$

  где λ_{max} — длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела,
  b — постоянная Вина.

- Энергия фотона $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

  где h — постоянная Планка,
  ν — частота света.

- Давление света при нормальном падении на поверхность $p = \frac{E}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho)$

  где E — энергетическая освещенность (интенсивность света),
  ρ — коэффициент отражения,
  w — объемная плотность энергии излучения.

- Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $E = A + E_{к\,max}$

  где A — работа выхода электронов из металла,
  $E_{к\,max}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

- Комптоновская длина волны частицы $\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{E_0}$

  где m — масса частицы,
  E_0 — энергия покоя частицы.

- Изменение длины волны излучения при эффекте Комптона $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) = 2\lambda_C \sin^2(\theta/2)$

  где λ и λ' — длина волны падающего и рассеянного излучения,
  θ — угол рассеяния.

Примеры решения задач

1. Тепловое излучение

1. Абсолютно черное тело было нагрето от температуры 100 до 300 °С. Найти, во сколько раз изменилась мощность суммарного излучения при этом.

Дано: $T_1 = 100$ °С $= 373$ К; $T_2 = 300$ °С $= 573$ К.

Найти: $\frac{N_2}{N_1}$.

Решение. Мощность N излучения тела определяется выражением $N = RS$, где R — энергетическая светимость тела, S — площадь его поверхности. В соответствии с законом Стефана—Больцмана $R = \sigma T^4$. Из этих выражений получаем

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\sigma T_2^4 S}{\sigma T_1^4 S}; \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{573}{373}\right)^4 \simeq 5{,}6.$$

Мощность излучения возрастет в 5,6 раза.

2. Максимум энергии излучения абсолютно черного тела приходится на длину волны 450 нм. Определить температуру и энергетическую светимость тела.

Дано: $\lambda_{max} = 450$ нм $= 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $b = 2{,}89 \cdot 10^{-3}$ м · К; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4).

Найти: T, R.

Решение. Длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела, по закону Вина равна

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Отсюда

$$T = \frac{b}{\lambda_{max}}; T = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} \simeq 6422 \text{ (К)}.$$

В соответствии с законом Стефана—Больцмана энергетическая светимость R абсолютно черного тела равна

$$R = \sigma T^4,$$
$$R = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}422^4 \cdot 10^{12} \simeq 9{,}6 \cdot 10^7 \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

3. Температура абсолютно черного тела понизилась с 1000 до 850 К. Определить, как и на сколько при этом изменилась длина волны, отвечающая максимуму распределения энергии.

Дано: $T_1 = 1000$ К; $T_2 = 850$ К; $b = 2{,}89 \cdot 10^{-3}$ м · К.

Найти: $\Delta\lambda_{max}$.

Решение. В соответствии с законом смещения Вина длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум распределения энергии, выражается формулой

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Исходя из этого запишем

$$\lambda_{1\,max} = \frac{b}{T_1};\ \lambda_{2\,max} = \frac{b}{T_2};$$

$$\Delta\lambda_{max} = \frac{b}{T_2} - \frac{b}{T_1} = b\left(\frac{T_1 - T_2}{T_2 T_1}\right);$$

$$\Delta\lambda_{max} = 2{,}89 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1000 - 850}{1000 \cdot 850}\right) = 0{,}51 \cdot 10^{-6}\ (\text{м}).$$

$$\lambda_{1\,max} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{1000} = 2{,}89 \cdot 10^{-6}\ (\text{м});$$

$$\lambda_{2\,max} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{850} = 3{,}4 \cdot 10^{-6}\ (\text{м}).$$

Следовательно, длина волны возросла на 0,51 мкм.

4. Во сколько раз увеличится мощность излучения черного тела, если максимум энергии излучения сместится от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Дано: $\lambda_к = 0{,}76$ мкм; $\lambda_ф = 0{,}38$ мкм.

Найти: $\frac{N_ф}{N_к}$.

Решение. Длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум энергии излучения черного тела, согласно закону смещения Вина равна

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}. \qquad (1)$$

Из формулы (1) определяем температуру, при которой максимум энергии излучения приходится на красную $\lambda_к$ и фиолетовую $\lambda_ф$ границы видимого спектра

$$T_к = \frac{b}{\lambda_к},\ T_ф = \frac{b}{\lambda_ф}. \qquad (2)$$

Мощность излучения равна

$$N = RS. \qquad (3)$$

В соответствии с законом Стефана—Больцмана

$$R = \sigma T^4, \qquad (4)$$

Для температур $T_к$ и $T_ф$ имеем

$$N_к = \sigma T_к^4 S \text{ и } N_ф = \sigma T_ф^4 S. \quad (5)$$

Из формул (5) находим

$$\frac{N_ф}{N_к} = \left(\frac{T_ф}{T_к}\right)^4. \quad (6)$$

Или с учетом (2) имеем

$$\frac{N_ф}{N_к} = \left(\frac{\lambda_к}{\lambda_ф}\right)^4. \quad (7)$$

Подставляя в (7) числовые значения, получим

$$\frac{N_ф}{N_к} = \left(\frac{0{,}76}{0{,}38}\right)^4 = 16.$$

2. Фотоны. Давление света. Фотоэффект. Эффект Комптона

5. На зачерненную поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны 0,65 мкм, производя давление $5 \times \times 10^{-6}$ Па. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности и число фотонов, падающих на площадь 1 м^2 в 1 с.

Дано: $\lambda = 0{,}65$ мкм $= 6{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $p = 5 \cdot 10^{-6}$ Па; $\rho = 0$; $S = 1$ м^2; $t = 1$ с.

Найти: n_0, n.

Решение. Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ вычисляется по формуле

$$p = w(1 + \rho) \quad (1)$$

или

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho), \quad (2)$$

где w — объемная плотность энергии, E_e — энергетическая освещенность, c — скорость света в вакууме, ρ — коэффициент отражения поверхности, в данном случае $\rho = 0$.

Объемная плотность энергии равна произведению концентрации фотонов (числа фотонов в единицу объема) на энергию одного фотона $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, т. е.

$$w = n_0 \frac{hc}{\lambda}, \quad (3)$$

откуда

$$n_0 = \frac{w\lambda}{hc}. \quad (4)$$

Определяя объемную плотность энергии из (1) и подставляя в (4), имеем

$$n_0 = \frac{p\lambda}{hc}; \qquad (5)$$

$$n_0 = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-7}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{13}\ (\text{м}^{-3}).$$

Число фотонов, падающих на площадь 1 м^2 за 1 с, численно равно отношению энергетической освещенности к энергии одного фотона:

$$n = \frac{E_e}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{E_e\lambda}{hc}. \qquad (6)$$

Энергетическую освещенность определяем из выражения (2) и, подставляя в (6), получаем

$$n = \frac{\rho c\lambda}{hc} = \frac{\rho\lambda}{h}. \qquad (7)$$

С учетом (5) выражение (7) примет вид $n = n_0 c$. Подставляя числовые значения, получаем

$$n = 1{,}6 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^8 = 4{,}8 \cdot 10^{21}\ (\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}).$$

6. Определить давление солнечных лучей, нормально падающих на зеркальную поверхность. Интенсивность солнечного излучения принять равной 1,37 кВт/м^2.

Дано: $E = 1{,}37 \cdot 10^3$ Вт/м^2; $\rho = 1$.

Найти: p.

Решение. Давление света на поверхность определяется по формуле

$$p = \frac{E}{c}(1 + \rho),$$

где E — энергетическая освещенность поверхности, c — скорость света в вакууме, ρ — коэффициент отражения. Для зеркальной поверхности $\rho = 1$.

$$p = \frac{1{,}37 \cdot 10^3 \cdot 2}{3 \cdot 10^8} \simeq 9 \cdot 10^{-6}\ (\text{Па}).$$

7. Свет с длиной волны 0,5 мкм нормально падает на зеркальную поверхность и производит на нее давление 4 мкПа. Определить число фотонов, ежесекундно падающих на 1 см^2 этой поверхности.

Дано: $\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м; $\rho = 1$; $p = 4 \cdot 10^{-6}$ Па; $S = 1$ см^2 $= 10^{-4}$ м^2.

Найти: n.

Решение. Давление света

$$p = \frac{E}{c}(1 + \rho),$$

где $E = \frac{hc}{\lambda}N$ — энергетическая освещенность поверхности, равная энергии фотона $\frac{hc}{\lambda}$, умноженной на число N фотонов, падающих на 1 м^2 за 1 с.

Число n фотонов, падающих на $S = 1$ см^2 поверхности, будет $n = NS$.

$$p = \frac{h}{\lambda}(1 + \rho)N;\ N = \frac{p\lambda}{h(1 + \rho)};\ n = \frac{p\lambda}{h(1 + \rho)}S;$$

$$n = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 2} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{17}.$$

8. Пучок параллельных лучей света падает нормально на плоскую зеркальную поверхность. Определить силу давления, испытываемую этой поверхностью, если ее площадь 2 м^2, а энергетическая освещенность поверхности 0,6 Вт/м^2.

Дано: $\rho = 1$; $S = 2$ м^2; $E = 0{,}6$ Вт/м^2.

Найти: F.

Решение. Давление света определяется по формуле $p = \frac{E}{c}(1 + \rho)$. Сила давления F будет равна

$$F = pS = \frac{E}{c}(1 + \rho)S;\quad F = \frac{0{,}6 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 10^8} = 8 \cdot 10^{-9}\ (\text{Н}).$$

9. Определить давление, оказываемое светом с длиной волны 0,4 мкм на черную поверхность, если ежесекундно на 1 см^2 поверхности нормально падает $6 \cdot 10^{16}$ фотонов.

Дано: $\lambda = 0{,}4$ мкм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м; $S = 1$ см^2 $= 10^{-4}$ м^2; $n = 6 \cdot 10^{16}$; $\rho = 0$.

Найти: p.

Решение. Давление света p на поверхность определяется по формуле $p = \frac{E}{c}(1 + \rho)$, где $E = \frac{hc}{\lambda}N$ — энергетическая освещенность поверхности. На 1 м^2 поверхности падает

$$N = \frac{n}{S} = \frac{6 \cdot 10^{16}}{1 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^{20}\ \text{фотонов}.$$

Тогда

$$p = \frac{h}{\lambda}(1 + \rho)N;$$

$$p = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{20}}{4 \cdot 10^{-7}} \simeq 10^{-6}\ (\text{Па}).$$

10. Световое давление, испытываемое зеркальной поверхностью площадью 1 см^2, равно 10^{-6} Па. Найти длину волны света, если на поверхность ежесекундно падает $5 \cdot 10^{16}$ фотонов.

Дано: $S = 1$ см^2 $= 10^{-4}$ м^2; $p = 10^{-6}$ Па; $n = 5 \cdot 10^{16}$; $\rho = 1$.

Найти: λ.

Решение. Если на $S = 1$ см^2 падает n фотонов, то на 1 м^2 $N = \frac{n}{S} = 5 \cdot 10^{20}$. Световое давление определяется по формуле

$$p = \frac{E}{c}(1 + \rho),$$

где $E = \frac{hc}{\lambda}N$ — энергетическая освещенность поверхности, т. е. энергия всех фотонов, попадающих на 1 м^2 поверхности за 1 с.

$$p = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{N}{c}(1 + \rho),$$

откуда

$$\lambda = \frac{hN(1+\rho)}{p}; \ \lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{20} \cdot 2}{10^{-6}} = 6{,}63 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

11. Давление света на зеркальную поверхность, расположенную на расстоянии 2 м от лампочки, нормально падающим лучом, равно 10^{-8} Па. Определить мощность, расходуемую на излучение.

Дано: $r = 2$ м; $\rho = 1$; $p = 10^{-8}$ Па.

Найти: N.

Решение. Давление света p на поверхность определяется по формуле $p = \frac{E}{c}(1 + \rho)$. Искомая мощность N будет равна $N = ES$, где $S = 4\pi r^2$ — площадь воображаемой сферы с радиусом r, на которую мысленно падает все излучение от лампочки.

$$E = \frac{pc}{1+\rho}; \ N = \frac{pc}{1+\rho} \cdot 4\pi r^2;$$

$$E = \frac{10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4}{2} \simeq 75{,}4 \text{ (Вт)}.$$

12. Давление света с длиной волны 0,55 мкм, нормально падающего на зеркальную поверхность, равно 9 мкПа. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности.

Дано: $\lambda = 0{,}55$ мкм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м; $p = 9$ мкПа $= 9 \cdot 10^{-6}$ Па; $\rho = 1$.

Найти: n.

Решение. Давление света при нормальном падении на поверхность с коэффициентом отражения ρ определяется по формуле

$$p = \frac{E}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho), \qquad (1)$$

где w — объемная плотность энергии излучения, $w = \frac{E}{c}$.

Объемная плотность энергии w равна произведению концентрации фотонов n (числа фотонов в единице объема) на энергию одного фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, т. е.

$$w = \frac{nhc}{\lambda}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$p = \frac{nhc}{\lambda}(1 + \rho), \qquad (3)$$

откуда

$$n = \frac{\lambda p}{hc(1 + \rho)}. \qquad (4)$$

Проводя вычисления, найдем

$$n = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}(1 + 1)} \simeq 1{,}24 \cdot 10^{13}\ (\text{м}^{-3}).$$

13. Красная граница фотоэффекта для никеля равна 0,257 мкм. Найти длину волны света, падающего на никелевый электрод, если фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов, равной 1,5 В.

Дано: $\lambda_к = 0{,}257$ мкм $= 2{,}57 \cdot 10^{-7}$ м; $U = 1{,}5$ В.

Найти: λ.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + E_{к\ max}. \qquad (1)$$

Красная граница фотоэффекта определяется из условия равенства энергии фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ работе выхода электронов A, т. е.

$$\frac{hc}{\lambda_к} = A. \qquad (2)$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов может быть определена через задерживающую разность потенциалов U:

$$E_{к\ max} = eU, \tag{3}$$

где e — элементарный заряд (заряд электрона).

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + eU. \tag{4}$$

Из уравнения (4) найдем длину волны света

$$\lambda = \left(\frac{1}{\lambda_к} + \frac{eU}{hc}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Подставляя в (5) числовые значения, получим

$$\lambda = \left(\frac{1}{2{,}57 \cdot 10^{-7}} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}\right)^{-1} \simeq$$
$$\simeq 1{,}96 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}) = 0{,}196\ (\text{мкм}).$$

14. Для фотокатода, выполненного из вольфрама, работа выхода равна 4,5 эВ. Определить, при какой максимальной длине волны происходит фотоэффект.

Дано: $A_{вых} = 4{,}5$ эВ.

Найти: $\lambda_к$.

Решение. Работа выхода электронов и длина волны $\lambda_к$ красной границы фотоэффекта связаны соотношением

$$A_в = \frac{hc}{\lambda_к}.$$

Отсюда

$$\lambda_к = \frac{hc}{A_в};\ \lambda_к = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \simeq 2{,}76 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

15. Фотон с длиной волны 0,2 мкм вырывает с поверхности фотокатода электрон, кинетическая энергия которого 2 эВ. Определить работу выхода и красную границу фотоэффекта.

Дано: $\lambda = 0{,}2$ мкм $= 2 \cdot 10^{-7}$ м; $E_к = 2$ эВ $= 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: $A_в$, $\lambda_к$.

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A_в + E_к;\ A_в = \frac{hc}{\lambda} - E_к;$$

$$A_в = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2 \cdot 10^{-7}} - 3{,}2 \cdot 10^{-19} \simeq 6{,}7 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) \simeq 4{,}2\ (\text{эВ}).$$

Длину волны $\lambda_к$ красной границы фотоэффекта определим из формулы $A_в = \frac{hc}{\lambda_к}$, откуда

$$\lambda_к = \frac{hc}{A};$$

$$\lambda_к = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6{,}7 \cdot 10^{-19}} = 2{,}97 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

16. Какую часть энергии фотона составляет энергия, которая пошла на совершение работы выхода электронов из фотокатода, если красная граница для материала фотокатода равна 0,54 мкм, кинетическая энергия фотоэлектронов 0,5 эВ?

Дано: $\lambda_к = 0{,}54$ мкм $= 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ м; $E_к = 0{,}5$ эВ.

Найти: $\frac{A_в}{\varepsilon}$.

Решение. Формула Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A_в + E_к$. Длина волны $\lambda_к$ красной границы

$$\lambda_к = \frac{hc}{A_в};\ \frac{A_в}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - E_к}{\varepsilon} = 1 - \frac{E_к}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_к} + E_к;$$

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5{,}4 \cdot 10^{-7}} + 0{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \simeq$$

$$\simeq 4{,}48 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) \simeq 2{,}8\ (\text{эВ}).$$

$$\frac{A_в}{\varepsilon} = 1 - \frac{E_к}{\varepsilon} = 1 - \frac{0{,}5}{2{,}8} \simeq 0{,}82,$$ т. е. составляет 82%.

17. Кинетическая энергия электронов, выбитых из цезиевого катода, равна 3 эВ. Определить, при какой максимальной длине волны света выбиваются электроны. Работа выхода для цезия 1,8 эВ.

Дано: $E_к = 3$ эВ $= 4{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж; $A_в = 1{,}8$ эВ $= 2{,}88 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: λ.

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A_в + E_к.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{hc}{A_в + E_к} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{(4{,}8 + 2{,}88) \cdot 10^{-19}} \simeq 2{,}6 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

18. Облучение литиевого фотокатода производится фиолетовыми лучами, длина волны которых равна 0,4 мкм. Определить скорость фотоэлектронов, если длина волны красной границы фотоэффекта для лития равна 0,52 мкм.

Дано: $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_к = 5{,}2 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: v.

Решение. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта энергия фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ расходуется на работу вырывания электрона $A_в = \frac{hc}{\lambda_к}$ и сообщение электрону кинетической энергии $E_к$.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_к} + E_к; \; E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_к}.$$

Тогда

$$v = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_к}\right)\frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{\lambda_к - \lambda}{\lambda_к \lambda}\right)};$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8 (5{,}2 - 4) \cdot 10^{-7}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 5{,}2 \cdot 4 \cdot 10^{-14}}} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}.$$

19. Определить максимальную скорость электрона, вырванного с поверхности металла γ-квантом с энергией 1,53 МэВ.

Дано: $E = 1{,}53$ МэВ; $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

Найти: v_{max}.

Решение. По формуле Эйнштейна для фотоэффекта $E = A_{вых} + E_к$. Энергия кванта излучения расходуется на работу вырывания электрона $A_{вых}$ и сообщение ему кинетической энергии $E_к$. Так как $A_{вых} \ll E$, то электрон будет релятивистским и $E = E_к$, а кинетическая энергия будет выражаться формулой

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - E_0,$$

где E_0 — энергия покоя электрона.

$$E_к + E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \; 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{E_0}{T + E_0}\right)^2 = \left(\frac{0{,}511}{1{,}53 + 0{,}511}\right)^2 \approx 0{,}063;$$

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 0{,}937; \; v = c \cdot 0{,}937 \approx 2{,}8 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

20. На цинковую пластинку падает пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны 0,2 мкм. Определить максимальную кинетическую энергию и максимальную скорость фотоэлектронов. Работа выхода для цинка 4 эВ.

Дано: $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м; $A_в = 6{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: E, υ.

Решение. По уравнению Эйнштейна для фотоэффекта

$$\frac{hc}{\lambda} = A_в + E_к, \text{ тогда } E_к = \frac{hc}{\lambda} - A_в;$$

$$E_к = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-7}} - 6{,}4 \cdot 10^{-19} = 3{,}545 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 2{,}2 \text{ (эВ)}.$$

Кинетическая энергия

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Отсюда $\upsilon = \sqrt{\frac{2E}{m}}$; $\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}545 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 8{,}8 \cdot 10^5$ (м/с).

21. На пластинку падает монохроматический свет с длиной волны 0,42 мкм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов 0,95 В. Определить работу выхода электронов с поверхности пластины.

Дано: $\lambda = 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ мкм; $U_з = 0{,}95$ В.

Найти: $A_в$.

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид $\frac{hc}{\lambda} = A_в + E_к$. Если известна задерживающая разность потенциалов $U_з$, то $E_к = e \cdot U_з$, где e — заряд электрона. Тогда

$$A_в = \frac{hc}{\lambda} - E_к = \frac{hc}{\lambda} - eU_з;$$

$$A_в = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0{,}42 \cdot 10^{-6}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}95 \simeq 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 2 \text{ (эВ)}.$$

22. Гамма-фотон с длиной волны 1,2 пм в результате комптоновского рассеяния на свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол 60°. Определить кинетическую энергию и импульс электрона отдачи. До столкновения электрон покоился.

Дано: $\lambda_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ м; $\theta = 60°$; $\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м; $E_0 = 0{,}511$ МэВ $\simeq 0{,}818 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Найти: $E_к$, p.

Решение. Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии на неподвижном свободном электроне равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$

где λ_1 и λ_2 — длины волн падающего и рассеянного фотона, θ — угол рассеяния фотона, $\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{E_0}$ — комптоновская длина волны электрона.

Из выражения (1) найдем

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_C(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Выразим энергию падающего и рассеянного фотона через его длину волны

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1},\ \varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_1 + \lambda_C(1 - \cos\theta)}. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия электрона отдачи согласно закону сохранения энергии равна

$$E_к = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \qquad (4)$$

Подставляя выражения (3) в (4), найдем

$$E_к = \left(\frac{hc}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_C(1 - \cos\theta)}{\lambda_1 + \lambda_C(1 - \cos\theta)} = E_0\left(\frac{\lambda_C}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_C(1 - \cos\theta)}{\lambda_1 + \lambda_C(1 - \cos\theta)}. \qquad (5)$$

Проводя вычисления, получим

$$E_к = 0{,}511\left(\frac{2{,}43 \cdot 10^{-12}}{1{,}2 \cdot 10^{-12}}\right)\frac{2{,}43 \cdot 10^{-12}(1 - \cos 60°)}{1{,}2 \cdot 10^{-12} + 2{,}43 \cdot 10^{-12}(1 - \cos 60°)} \simeq$$
$$\simeq 0{,}521\ (\text{МэВ}) = 0{,}833 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}).$$

Зная кинетическую энергию электрона, найдем его импульс. Поскольку кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}. \qquad (6)$$

Подставляя в (6) числовые данные, получим

$$p = \frac{1}{3 \cdot 10^8}\sqrt{0{,}833 \cdot 10^{-13}(0{,}833 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0{,}818 \cdot 10^{-13})} \simeq$$
$$\simeq 4{,}8 \cdot 10^{-22}\ (\text{кг} \cdot \text{м/с}).$$

23. Угол рассеяния фотона с энергией 1,2 МэВ на свободном электроне 60°. Найти длину волны рассеянного фотона, энергию и импульс электрона отдачи (кинетической энергией электрона до соударения пренебречь).

Дано: $\varepsilon = 1{,}2$ МэВ $= 1{,}92 \cdot 10^{-13}$ Дж; $\theta = 60°$.

Найти: λ_2, E_e, p_e.

Решение. Изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = \lambda_C(1 - \cos\theta). \qquad (1)$$

Из формулы (1) находим $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + \lambda_C(1 - \cos\theta)$.

Выражая λ_1 через энергию фотона $\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$, получаем

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\varepsilon_1} + \lambda_C(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Энергия электрона отдачи по закону сохранения энергии

$$E_e = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

Выразим изменение длины волны через изменение частоты: $\Delta\lambda = \frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1} = \frac{c(\nu_1 - \nu_2)}{\nu_1\nu_2}$. С учетом (1) можно написать:

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{h\nu_1\nu_2}{mc^2}(1 - \cos\theta). \qquad (3)$$

Умножая формулу (3) на h и учитывая, что $h\nu_1 = \varepsilon_1$, $h\nu_2 = \varepsilon_2$, $mc^2 = E_0$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = E_e$, получим

$$E_e = \frac{\varepsilon_1^2(1 - \cos\theta)}{E_0 + \varepsilon_1(1 - \cos\theta)}, \qquad (4)$$

где $E_0 = 0{,}511$ МэВ $= 0{,}82 \cdot 10^{-13}$ Дж — энергия покоя электрона. Зная энергию электрона, найдем

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{E_e(E_e + 2E_0)}. \qquad (5)$$

Подставляя числовые значения в формулы (2), (4) и (5), получаем:

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}92 \cdot 10^{-13}} + 2{,}43 \cdot 10^{-12}(1 - 0{,}5) \simeq 2{,}25 \cdot 10^{-12} \text{ (м)};$$

$$E_e = \frac{(1{,}2)^2 \cdot 0{,}5}{(0{,}511 + 1{,}2) \cdot 0{,}5} \simeq 0{,}648 \text{ (МэВ)} \simeq 1{,}04 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)};$$

$$p_e = \frac{1}{3 \cdot 10^8}\sqrt{1{,}04 \cdot 10^{-13}(1{,}04 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-13})} =$$

$$= 5{,}56 \cdot 10^{-22} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.$$

24. Фотон с импульсом $5{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с был рассеян на свободном электроне на угол 30° в результате эффекта Комптона. Определить импульс рассеянного фотона.

Дано: $p_1 = 5{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с; $\theta = 30°$.

Найти: p_2.

Решение. Импульс фотона $p_1 = \frac{h}{\lambda_1}$; $p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$, откуда $\lambda_1 = \frac{h}{p_1}$, $\lambda_2 = \frac{h}{p_2}$. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при эффекте Комптона равно

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \text{ или } \frac{h}{p_2} - \frac{h}{p_1} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$

Отсюда

$$p_2 = \frac{1}{\frac{1}{mc}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{p_1}} = \frac{p_1 mc}{p_1(1 - \cos\theta) + m_0 c} =$$

$$= \frac{0{,}544 \cdot 10^{-21} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}{5{,}44 \cdot 10^{-22} \cdot 0{,}134 + 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \simeq 4{,}3 \cdot 10^{-22} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.$$

25. Фотон с энергией 0,51 МэВ в результате комптоновского рассеяния отклонился на угол 180°. Определить долю энергии в процентах, оставшуюся у рассеянного фотона.

Дано: $\varepsilon_1 = 0{,}51$ МэВ; $\theta = 180°$.

Найти: $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Решение. По закону сохранения энергии

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + E_э,$$

где ε_1 — энергия налетающего фотона, ε_2 — энергия рассеянного фотона, $E_э$ — энергия электрона.

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1} \text{ и } \lambda_1 = \frac{hc}{\varepsilon_1},$$

где λ_1 — длина волны налетающего фотона, h — постоянная Планка, c — скорость света.

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2},$$

где λ_2 — длина волны рассеянного фотона. Изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ фотона при комптоновском рассеянии равно

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta),$$

где $\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м — комптоновская длина волны электрона, θ — угол рассеяния.

$$\Delta\lambda = \lambda_C \cdot 2.$$

Тогда $$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + 2\lambda_C$$

и энергия $$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_1 + 2\lambda_C},$$

а отношение $$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{\varepsilon_1\left(\frac{hc}{\varepsilon_1} + 2\lambda_C\right)} = \frac{hc}{hc + \varepsilon_1 \cdot 2\lambda_C};$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 + 0{,}51 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot 2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}} \simeq$$
$$\simeq 0{,}33 = 33\%.$$

26. В результате комптоновского эффекта электрон приобрел энергию 0,5 МэВ. Определить энергию падающего фотона, если длина волны рассеянного фотона $2{,}5 \cdot 10^{-12}$ м.

Дано: $E = 0{,}5$ МэВ; $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-12}$ м.

Найти: ε_1.

Решение. По закону сохранения энергии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + E$, где ε_1 — энергия бомбардирующего фотона, $\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$ — энергия рассеянного фотона. Тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_2} + E;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}5 \cdot 10^{-12}} + 0{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) = 1\ (\text{МэВ}).$$

27. В результате комптоновского рассеяния на свободном покоящемся электроне длина волны γ-фотона λ_1 увеличилась вдвое. Найти кинетическую энергию и импульс электрона отдачи, если угол рассеяния равен 60°.

Дано: $\lambda_2 = 2\lambda_1$; $\theta = 60°$.

Найти: E, p.

Решение. Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при комптон-эффекте определяется по формуле

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C(1 - \cos\theta),$$

где λ_1 и λ_2 — длина волны фотона до и после рассеяния, $\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ — комптоновская длина волны, θ — угол рассеяния. По условию задачи $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_1$ и тогда

$$\lambda_1 = \lambda_C(1 - \cos\theta),\ \lambda_2 = 2\lambda_C(1 - \cos\theta).$$

Энергия электрона

$$E = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_C(1-\cos\theta)} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right);$$

$$E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 10^8}{2{,}43 \cdot 10^{-12}(1-0{,}5)} \simeq 0{,}8 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) = 0{,}5\ (\text{МэВ}).$$

Импульс электрона

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)},$$

где $E_0 = 0{,}511$ МэВ — энергия покоя электрона, c — скорость света.

$$p = \frac{1}{3 \cdot 10^8}\sqrt{0{,}8 \cdot 10^{-13}(0{,}8 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-13})} =$$

$$= 4{,}7 \cdot 10^{-22}\ (\text{кг} \cdot \text{м/с}).$$

28. Первоначально покоившийся электрон приобрел кинетическую энергию 0,06 МэВ в результате комптоновского рассеяния на нем γ-фотона с энергией 0,51 МэВ. Чему равен угол рассеяния фотона?

Дано: $\varepsilon_e = 0{,}06$ МэВ; $\varepsilon_1 = 0{,}51$ МэВ.

Найти: θ.

Решение. Энергия рассеянного фотона

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_e = 0{,}45\ \text{МэВ}.$$

Длину волны λ_1 и λ_2 фотонов выразим из формулы для энергии фотонов:

$$\frac{hc}{\lambda} = \varepsilon;\ \lambda_1 = \frac{hc}{\varepsilon_1};\ \lambda_2 = \frac{hc}{\varepsilon_2}.$$

Изменение длины фотона $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ выражается формулой $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$;

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta);\ \frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta);$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{mc^2}(1-\cos\theta).$$

$\varepsilon_0 = mc^2 = 0{,}511$ МэВ — энергия покоя электрона,

$$\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon_0}(1-\cos\theta);\ \frac{1}{0{,}51}(1-\cos\theta) = \frac{1}{0{,}45} - \frac{1}{0{,}51} = 0{,}261;$$

$$1 - \cos\theta = 0{,}261 \cdot 0{,}511 \simeq 0{,}133;\ \cos\theta = 0{,}867;\ \theta = 30°.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Какую энергию теряет за 1 с раскаленная поверхность площадью 0,2 $см^2$ при температуре 2000 К? Поглощательная способность поверхности 0,5. **Ответ**: 9,1 Дж.

2. Определить длину волны, отвечающую максимуму испускательной способности черного тела при температуре 37 °С, и энергетическую светимость тела. **Ответ**: $7 \cdot 10^{-6}$ м; 1602 $Вт/м^2$.

3. Максимум испускательной способности Солнца приходится на длину волны 0,5 мкм. Считая, что Солнце излучает как черное тело, определить температуру его поверхности и мощность излучения. **Ответ**: 5780 К; $3{,}84 \cdot 10^{26}$ Вт.

4. Считая, что Солнце излучает как черное тело, определить интенсивность солнечного излучения вблизи Земли. Температуру поверхности Солнца принять равной 5780 К. **Ответ**: 1360 $Вт/м^2$.

5. Красная граница для некоторого металла 0,6 мкм. Металл освещается светом, длина волны которого 0,4 мкм. Определить максимальную скорость электронов, выбиваемых светом из металла. **Ответ**: $6{,}04 \cdot 10^5$ м/с.

6. Найти частоту света, падающего на пластинку никеля, если скорость фотоэлектронов $2{,}8 \cdot 10^6$ м/с. Работа выхода электронов из никеля 4,8 эВ. **Ответ**: $6{,}5 \cdot 10^{15}$ $с^{-1}$.

7. При освещении поверхности некоторого металла светом с длиной волны 0,22 мкм задерживающий потенциал равен 1,14 В. Найти работу выхода электронов из этого металла. **Ответ**: 4,5 эВ.

8. Давление монохроматического света длиной волны 0,5 мкм на поверхность с коэффициентом отражения 0,8 равно 1,43 Па. Определить концентрацию фотонов вблизи поверхности. **Ответ**: $2 \cdot 10^{18}$ $м^{-3}$.

9. Фотон с энергией 0,500 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом 60°. Найти энергию рассеянного фотона, кинетическую энергию и импульс отдачи. Считать, что кинетической энергией электрона до соударения можно пренебречь. **Ответ**: 0,335 МэВ; 0,165 МэВ; $0{,}236 \cdot 10^{-21}$ кг · м/с.

10. Определите импульс фотона, энергия которого равна 10 кэВ. **Ответ**: $5{,}33 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с.

ЧАСТЬ 6

Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики

Основные уравнения и формулы

- Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

где h — постоянная Планка,
p — импульс частицы.

- Соотношение неопределенностей Гейзенберга:
для координаты и импульса

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

где Δx — неопределенность координаты частицы,
Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на соответствующую координатную ось;

для энергии и времени

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

где ΔE — неопределенность энергии частицы в некотором состоянии,
Δt — время нахождения частицы в этом состоянии.

- Плотность вероятности нахождения частицы в соответствующем месте пространства

$$w = |\psi|^2$$

где ψ — волновая функция частицы.

- Волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

где l — ширина ямы,
x — координата частицы в яме ($0 < x < l$),
n — квантовое число ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

- Энергия частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме

$$E_{\text{п}} = \frac{h^2}{8ml^2} n^2$$

где m — масса частицы.

- Сериальные формулы спектра водородоподобных атомов

$$\frac{1}{\lambda} = R'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

где λ — длина волны спектральной линии,
R' — постоянная Ридберга,
Z — порядковый номер элемента,
$n = 1, 2, 3, \ldots, k = n + 1, n + 2, \ldots$

- Спектральные линии характеристического рентгеновского излучения $\frac{1}{\lambda} = R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$

  где a — постоянная экранирования.

- Дефект массы ядра $\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_я = Zm_\text{Н} + (A-Z)m_n - m_\text{а}$

  где m_p — масса протона,
  m_n — масса нейтрона,
  $m_\text{Н}$ — масса атома ${}^1_1\text{H}$,
  $m_\text{а}$ и $m_я$ — масса атома и его ядра ${}^A_Z X$,
  Z и A — зарядовое и массовое числа.

- Энергия связи ядра $E_\text{св} = c^2\Delta m$

  где c — скорость света в вакууме.

- Удельная энергия связи $\varepsilon_\text{св} = \frac{E_\text{св}}{A}$

- Закон радиоактивного распада $N = N_0 \exp(-\lambda t)$

  где N_0 — начальное число радиоактивных ядер в момент времени $t = 0$,
  N — число нераспавшихся радиоактивных ядер в момент времени t,
  λ — постоянная радиоактивного распада.

- Активность радиоактивного вещества $a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$

- Энергия ядерной реакции $Q = c^2(m_1 + m_2 - \sum m_i')$

  где m_1 и m_2 — массы покоя частиц, вступающих в реакцию,
  $\sum m_i'$ — сумма масс покоя частиц, образовавшихся в результате реакции.

- Закон поглощения излучения веществом $I = I_0 \exp(-\mu x)$

  где I_0 — интенсивность излучения на входе в поглощающий слой вещества,
  I — интенсивность излучения после прохождения поглощающего слоя вещества толщиной x,
  μ — линейный коэффициент поглощения.

Примеры решения задач

1. Электронные оболочки атома. Теория Бора

1. Атом водорода испустил фотон с длиной волны $4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м. На сколько изменилась энергия электрона в атоме?

Дано: $\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: ΔE.

Решение. По теории Бора при переходе электрона из состояния с энергией E_n в состояние с энергией E_m излучается фотон с энергией, равной $h\upsilon = E_n - E_m = \Delta E$.

Учитывая, что $\upsilon = c/\lambda$, получаем

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda};\ \Delta E = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}86 \cdot 10^{-7}} \simeq 4{,}09 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) \simeq 2{,}56\ (\text{эВ}).$$

2. Определить первый боровский радиус орбиты в атоме водорода и скорость движения электрона по этой орбите.

Дано: $Z = 1$; $n = 1$.

Найти: r_1, υ.

Решение. Радиус n-й орбиты в водородоподобном атоме, заряд ядра которого равен Ze, определяется по формуле

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{mZe^2} \cdot n^2 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m Ze^2} n^2,$$

где n — номер орбиты, m — масса электрона.

При $n = 1$ и $Z = 1$

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2};\ r_1 = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}{3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} \simeq 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

По второму постулату Бора момент импульса электрона на n-й орбите равен $m\upsilon r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi}$.

Тогда $\upsilon = nh/2\pi m r_n$ и при $n = 1$ значение $\upsilon = h/2\pi m r_1$,

$$\upsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} \simeq 2{,}2 \cdot 10^6\ (\text{м/с}).$$

3. Определить длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую.

Дано: $m = 2$; $n = 6$; $R' = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$.

Найти: λ.

Решение. Длина волны λ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода, определяется по обобщенной формуле Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где R' — постоянная Ридберга, m и n — номера орбит, между которыми происходит переход электрона. Из этой формулы следует, что

$$\lambda = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}; \lambda = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)} \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}).$$

4. Определить наибольшие и наименьшие длины волн фотонов, излучаемых при переходе электронов в сериях Лаймана, Бальмера и Пашена.

Дано: $R' = 1{,}097 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$.

Найти: $\lambda_{1\,max}$, $\lambda_{1\,min}$, $\lambda_{2\,max}$, $\lambda_{2\,min}$, $\lambda_{3\,max}$, $\lambda_{3\,min}$.

Решение. Обобщенная формула Бальмера позволяет определять длину волны λ при всевозможных переходах электрона в атоме водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ или } \lambda = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}.$$

В серии Лаймана переход осуществляется на первую орбиту со всех остальных, т. е. $m = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots, \infty$.

Следовательно,

$$\lambda_{1\,max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7(1 - 0{,}25)} \simeq 0{,}122\ (\text{мкм});$$

$$\lambda_{1\,min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{R'} \simeq 0{,}091\ (\text{мкм}).$$

В серии Бальмера переход осуществляется на вторую орбиту со всех вышележащих , т. е. $m = 2$; $n = 3, 4, 5, \ldots, \infty$.

$$\lambda_{2\,max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7(025 - 0{,}11)} \simeq 0{,}656\ (\text{мкм});$$

$$\lambda_{2\,min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 0{,}25} \simeq 0{,}365\ (\text{мкм}).$$

В серии Пашена переход осуществляется на третью орбиту со всех вышележащих, т. е. $m = 3$; $n = 4, 5, 6, \ldots, \infty$.

$$\lambda_{3\,max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right)} \simeq 1{,}88 \text{ (мкм)};$$

$$\lambda_{3\,min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7} \simeq 0{,}82 \text{ (мкм)}.$$

5. Сколько линий спектра атома водорода попадает в видимую область ($\lambda = 0{,}4 \div 0{,}76$ мкм)? Вычислить длины волн этих линий. Каким цветам они соответствуют?

Дано: $0{,}4 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}76$ мкм; $R' = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$.

Найти: λ.

Решение. Длины волн спектра атома водорода определяются по формуле

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k = n + 1; n + 2; \ldots$.

В видимой области спектра находятся первые четыре линии серии Бальмера ($n = 2$, $k = 3, 4, 5, 6$). Длины волн этих линий будут равны:

$$\lambda_1 = \frac{1}{R'}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)^{-1} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)^{-1} \simeq$$

$$\simeq 6{,}56 \cdot 10^{-7} \text{ (м)} \text{ — красная линия;}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)^{-1} \simeq 4{,}86 \cdot 10^{-7} \text{ (м)} \text{ — голубая линия;}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)^{-1} \simeq 4{,}34 \cdot 10^{-7} \text{ (м)} \text{ — фиолетовая линия;}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right)^{-1} \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ (м)} \text{ — фиолетовая линия.}$$

2. Элементы квантовой механики

6. Кинетическая энергия протона в 4 раза меньше его энергии покоя. Вычислить дебройлеровскую длину волны протона.

Дано: $E_к = \frac{E_0}{4}$; $E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля λ определяется по формуле

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1)$$

Поскольку по условию задачи

$$E_к = \frac{E_0}{4}, \qquad (2)$$

кинетическая энергия $E_к$ протона сравнима с его энергией покоя E_0, то импульс p и кинетическая энергия связаны релятивистским соотношением

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) условие (2), найдем

$$p = \frac{3}{4}\frac{E_0}{c}. \qquad (4)$$

С учетом равенства (4) выражение (1) примет вид

$$\lambda = \frac{4}{3}\frac{hc}{E_0}. \qquad (5)$$

Подставляя в (5) числовые значения, получим

$$\lambda = \frac{4 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-10}} \simeq 1{,}77 \cdot 10^{-15}\ (\text{м}).$$

7. Вычислить длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}75c$ (c — скорость света в вакууме).

Дано: $v = 0{,}75c$; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Импульс частицы, движущейся с релятивистской скоростью v, равен $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{mv} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}75 \cdot 3 \cdot 10^8}\sqrt{1 - 0{,}75^2} \simeq 2{,}14 \cdot 10^{-12}\ (\text{м}).$$

8. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Вычислить длину волны де Бройля для такого протона.

Дано: $E_к = E_0$; $E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Найти: λ.

Решение. Длина волны де Бройля вычисляется по формуле $\lambda = \frac{h}{p}$. Импульс релятивистской частицы (каким является про-

тон в условиях данной задачи, так как $E_к = E_0$) вычисляется по формуле

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)} = E_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{c}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}};\ \lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{3}} \simeq 7{,}7 \cdot 10^{-16}\ (\text{м}).$$

9. Определить кинетическую энергию протона и электрона, для которых длина волны де Бройля равна 0,06 нм.

Дано: $\lambda = 6 \cdot 10^{-11}$ м.

Найти: E_e, E_p.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$. Из уравнения кинетической энергии

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Найдем импульс:

$$p = \sqrt{2E_к m}.$$

Подставив его в выражение для волны де Бройля, получим:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E_к \cdot m}},$$

откуда $E_e = \frac{h^2}{2\lambda^2 m};\ E_e = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 6^2 \cdot 10^{-22} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} \simeq$

$$\simeq 6{,}7 \cdot 10^{-17}\ (\text{Дж}) = 419\ (\text{эВ}).$$

$$E_p = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 6^2 \cdot 10^{-22} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \simeq 3{,}7 \cdot 10^{-20}\ (\text{Дж}) \simeq 0{,}23\ (\text{эВ}).$$

10. Протон обладает кинетической энергией, равной энергии покоя. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля протона, если его кинетическая энергия увеличится в 2 раза?

Дано: $E_{к1} = E_0$; $E_{к2} = 2E_0$.

Найти: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$.

Импульс $p = \frac{1}{c}\sqrt{E_к(E_к + 2E_0)}$.

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к1}(E_{к1} + 2E_0)}} = \frac{hc}{\sqrt{E_0(E_0 + 2E_0)}} = \frac{hc}{E_0\sqrt{3}};$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к2}(E_{к2} + 2E_0)}} = \frac{hc}{2\sqrt{2}E_0}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \simeq 1{,}63.$$

Длина волны уменьшится в 1,63 раза.

11. Какой кинетической энергией должен обладать протон, чтобы длина волны де Бройля протона равнялась его комптоновской длине волны?

Дано: $\lambda_Д = \lambda_C$.

Найти: $E_к$.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda_Д$ и комптоновская λ_C длина волны определяются по формулам:

$$\lambda_Д = \frac{h}{p},$$

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}.$$

Импульс движущегося протона

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так как $\lambda_Д = \lambda_C$, то $p = mc$ и $mc = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

откуда $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, а $v = \frac{c}{\sqrt{2}}$. $E_к = E - E_0$,

где $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ полная энергия, $E_0 = mc^2$ — энергия покоя.

$$E_к = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right);$$

$$E_к = E_0(\sqrt{2} - 1) = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}41 =$$
$$= 6{,}23 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)} = 389 \text{ (МэВ)}.$$

12. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля для случаев: $U = 51$ В; $U = 510$ кВ.

Дано: $U_1 = 51$ В; $U_2 = 5{,}1 \cdot 10^5$ В; $E_0 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Найти: λ_1, λ_2.

Решение. Длина волны де Бройля равна $\lambda = \frac{h}{p}$. Импульс выразим из условия, что кинетическая энергия электрона равна $E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2E_к m}$. С другой стороны, $E_{к1} = eU_1$, где e — заряд электрона. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2eU_1 m}};$$

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 51 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 1{,}72 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}.$$

Во втором случае импульс p определяем по формуле

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{E_{к2}(E_{к2} + 2E_0)},$$

где E_0 — энергия покоя электрона, $E_{к2} = eU_2$. Тогда

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{E_{к2}(E_{к2} + 2E_0)}};$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}1 \cdot 10^5 (1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-14})}} = 1{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

13. Среднее время жизни возбужденных состояний атома составляет 10 нс. Вычислить естественную ширину спектральной линии ($\lambda = 0{,}7$ мкм), соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома.

Дано: $\tau = 10^{-8}$ с; $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: $\Delta\lambda_{min}$.

Решение. При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) энергия, равная

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_k. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что неопределенность длины волны $\Delta\lambda$ излучения связана с неопределенностью энергии уровней ΔE_n и ΔE_k атома соотношением

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \Delta E_n + \Delta E_k. \qquad (2)$$

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}, \qquad (3)$$

где Δt — неопределенность времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое.

Поскольку Δt не превышает среднее время жизни τ возбужденного состояния атома, то минимальная неопределенность энергии возбужденных уровней, согласно (3), равна

$$\Delta E_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \qquad (4)$$

Из (2) с учетом (4) найдем минимальную неопределенность длины волны излучения, которая называется естественной шириной спектральной линии

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k}\right). \qquad (5)$$

Если одно из состояний, между которыми совершается переход, является основным, то

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \qquad (6)$$

поскольку для основного состояния $\tau = \infty$. Для возбужденных состояний с одинаковым временем жизни $\tau_n = \tau_k = \tau$ имеем

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) числовые значения, получим

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{(7\cdot 10^{-7})^2}{3{,}14\cdot 3\cdot 10^8\cdot 10^{-8}} \simeq 5{,}2\cdot 10^{-14}\ (\text{м}).$$

14. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано: $E = 10$ эВ $= 1{,}6\cdot 10^{-18}$ Дж; $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: r.

Решение. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar,$$

где Δx — неопределенность координаты, Δp_x — неопределенность импульса, $\hbar$ — постоянная Планка.

Предполагая, что $\Delta x \simeq r$ — линейному размеру атома, получим $r \simeq \frac{\hbar}{\Delta p}$. Импульс электрона, обладающего кинетической энергией E, равен

$$p = \sqrt{2mE}.$$

Предполагая, что по порядку величины $\Delta p \simeq p$, оценим r:

$$r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}; \; r = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-18}}} = 0{,}62 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

15. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии равно 12 нс. Вычислить минимальную неопределенность длины волны $\lambda =$ = 12 мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

Дано: $\Delta t = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ с; $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м.

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Энергия излучаемого фотона

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Продифференцируем E по λ:

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2}, \text{ или } \Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}$ выразим ΔE.

$\Delta E = \frac{h}{(\Delta t) \cdot 2\pi}$, здесь Δt и ΔE — неопределенности времени и энергии.

Приравняем выражения для ΔE:

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{h}{\Delta t 2\pi},$$

откуда

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 h}{hc\Delta t 2\pi};$$

$$\Delta\lambda = \frac{1{,}2^2 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}28} \simeq 6{,}4 \cdot 10^{-16} \text{ (м)}.$$

16. Среднее время жизни π^0-мезона равно $1{,}9 \cdot 10^{-16}$ с. Какова должна быть энергетическая разрешающая способность прибора, с помощью которого можно зарегистрировать π^0-мезон?

Дано: $t = 1{,}9 \cdot 10^{-16}$ с.

Найти: $\Delta E'$.

Решение. Разрешающая способность $\Delta E'$ должна быть не меньше неопределенности энергии ΔE в условиях поставлен-

ной задачи, т. е. $\Delta E' = \Delta E$. Предполагая, что время жизни мезона t примерно равно неопределенности времени Δt в соотношении неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}$, получим

$$\Delta E' = \frac{h}{2\pi t}; \quad \Delta E' = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{6{,}28 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-16}} \simeq 5{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)}.$$

17. Атом испустил фотон с длиной волны 0,55 мкм. Продолжительность излучения 10 нс. Определить наименьшую погрешность, с которой может быть измерена длина волны излучения.

Дано: $\lambda = 0{,}55$ мкм; $t = 10^{-8}$ с.

Найти: $\Delta\lambda$.

Решение. Энергия фотона $E = \frac{hc}{\lambda}$,

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2} \text{ или } \Delta E = -\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

откуда $$\Delta\lambda = \frac{(\Delta E) \cdot \lambda^2}{h \cdot c}.$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}.$$

Отсюда $$\Delta E = \frac{h}{t2\pi}.$$

Подставляя ΔE в формулу для $\Delta\lambda$, получим:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{t2\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{hc};$$

$$\Delta\lambda = \frac{5{,}5^2 \cdot 10^{-14}}{1 \cdot 10^{-8} \cdot 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-14} \text{ (м)}.$$

18. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, ширина которой $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м. Определить энергию, излучаемую при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй.

Дано: $l = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м; $n = 2$; $n + 1 = 3$.

Найти: ΔE.

Решение. Энергия E_n электрона (масса = m), находящегося на n-м энергетическом уровне в потенциальной яме шириной l,

определяется по формуле $E_n = \frac{h^2 n^2}{8ml^2}$. Энергия, излучаемая при переходе электрона с $(n + 1)$-го уровня на n-й, равна

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(2n + 1);$$

$$\Delta E = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 5}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}4^2 \cdot 10^{-18}} \simeq 1{,}54 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) \simeq 1\ (\text{эВ}).$$

19. Электрон находится в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $l = 1$ нм. Определить наименьшую разность энергетических уровней электрона.

Дано: $l = 10^{-9}$ м.

Найти: $\Delta E_{\min}$.

Решение. Энергия электрона E_n, находящегося в потенциальной яме шириной l, на n-м энергетическом уровне определяется по формуле

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2.$$

Разность $\Delta E_{n,\,n+1}$ энергий электрона на соседних n и $(n + 1)$-м уровнях равна

$$\Delta E_{n,\,n+1} = \frac{h^2}{8ml^2}(2n + 1).$$

Очевидно, что ΔE будет минимальна при $n = 1$.

$$\Delta E_{\min} = \frac{6{,}63^2 \cdot 3 \cdot 10^{-68}}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-18}} \simeq 1{,}8 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) \simeq 1{,}1\ (\text{эВ}).$$

20. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l на втором энергетическом уровне. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

Дано: l, $w_n = w_\infty$, $n = 2$.

Найти: x.

Решение. Волновая функция ψ, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l, имеет вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (1)$$

Согласно физическому смыслу волновой функции,

$$|\psi|^2 = w, \qquad (2)$$

где w — плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x.

Если частица находится на втором энергетическом уровне ($n = 2$), то

$$w_2 = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right). \qquad (3)$$

В соответствии с принципом соответствия Бора выражение для классической плотности вероятности получается при $n \to \infty$:

$$w_\infty = \frac{1}{l}. \qquad (4)$$

Приравнивая по условию задачи выражения (3) и (4), получим

$$\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Решая уравнение (5), найдем

$$x = \left(k \pm \frac{1}{4}\right)\frac{l}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (6)$$

В пределах ямы ($0 \leqslant x \leqslant l$) таких точек будет четыре:

$$x = \left(\frac{l}{8}, \frac{3l}{8}, \frac{5l}{8}, \frac{7l}{8}\right).$$

21. Определить ширину одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона с третьего энергетического уровня на второй излучается энергия 1 эВ.

Дано: $i = 3$; $n = 2$; $\Delta E = 1$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Найти: l.

Решение. Энергия электрона, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне, определяется по формуле $E = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2$. Разность энергий электрона ΔE на n-м и i-м уровнях $\Delta E = E_i = E_n = \frac{h^2}{8ml^2}(i^2 - n^2)$, откуда

$$l = h\sqrt{\frac{i^2 - n^2}{8m \cdot \Delta E}};$$

$$l = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{9-4}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \simeq 1{,}37 \cdot 10^{-9}\ (\text{м}).$$

22. Определить, при какой ширине одномерной потенциальной ямы дискретность энергии электрона становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре 300 К.

Дано: $T = 300$ К.

Найти: l.

Решение. Энергия электрона E, находящегося в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне,

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2.$$

Дискретность (разность) ΔE энергии на n-м и $(n + 1)$-м уровнях равна

$$\Delta E = \frac{h^2}{8ml^2}(2n + 1).$$

Энергия теплового движения электрона

$$W = \frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура.

Приравнивая $W = \Delta E$, выразим ширину ямы l:

$$\frac{h^2(2n+1)}{8ml^2} = \frac{3}{2}kT;\ l = h\sqrt{\frac{2n+1}{12mkT}}.$$

Наименьшая ширина ямы будет при $n = 1$:

$$l = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\sqrt{\frac{3}{12 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \simeq 5{,}4 \cdot 10^{-9}\ (\text{м}).$$

23. Определить, при какой температуре дискретность энергии электрона, находящегося в одномерной потенциальной яме шириной $2 \cdot 10^{-9}$ м, становится сравнимой с энергией теплового движения.

Дано: $l = 2 \cdot 10^{-9}$ м.

Найти: T.

Решение. Энергия электрона E, находящегося в потенциальной яме на n-м энергетическом уровне, $E_n = \frac{h^2}{8ml^2} \cdot n^2$, дискретность (разность) ΔE энергий на n-м и $(n + 1)$-м энергетических уровнях $\Delta E = \frac{h^2}{8ml^2}(2n + 1)$.

Энергия теплового движения электрона $W = \frac{3}{2}kT$. Приравнивая $\Delta E = W$, определим T:

$$\frac{h^2(2n+1)}{8ml^2} = \frac{3}{2}kT;\ T = \frac{h^2(2n+1)}{12kml^2}.$$

Очевидно, что ΔE будет минимальной при $n = 1$.

$$T = \frac{6{,}63^2 \cdot 10^{-68} \cdot 3}{12 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{-18}} \simeq 2188\ (\text{К}).$$

24. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $0 < x < \frac{l}{4}$ на втором энергетическом уровне.

Дано: $0 < x < \frac{l}{4}$; $n = 2$.

Найти: w.

Решение. Волновая функция $\psi(x)$ частицы в потенциальной яме шириной l на n-м энергетическом уровне имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}$. Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определяется интегралом квадрата модуля волновой функции

$$w = \int_0^{l/4} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_0^{l/4} \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/4} \sin^2 \frac{\pi n x}{l} \, dx.$$

Известно, что

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Тогда

$$\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right).$$

$$w = \frac{1}{l} \int_0^{l/4} \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \int_0^{l/4} dx - \frac{1}{l} \int_0^{l/4} \cos 2\pi n \frac{x}{l} \, dx = \frac{1}{l} x \Big|_0^{l/4} -$$

$$- \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^{l/4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n \frac{1}{4}}{l} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

25. Частица в потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $0 < x < \frac{l}{2}$ на третьем энергетическом уровне.

Дано: l; $n = 3$; интервал $0 < x < \frac{l}{2}$.

Найти: w.

Решение. Волновая функция, описывающая поведение частицы в одномерной потенциальной яме, имеет вид $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}$. Вероятность нахождения частицы в заданном интервале определяется интегралом

$$w = \int_0^{l/2} |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^{l/2} \frac{2}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n x}{l} \, dx.$$

Произведя замену

$$\sin^2 \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{l}\right),$$

получим

$$w = \int_0^{l/2} \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{2}\, dx - \int_0^{l/2} \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi n x}{l}\, dx = \frac{1}{l} x \Big|_0^{l/2} - \frac{1}{l} \times$$

$$\times \frac{l}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{l} \Big|_0^{l/2} \text{ (при } n = 3);$$

$$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3} \times$$

$$\times \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot l/2}{l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 3{,}14} \cdot \sin 3\pi = \frac{1}{2}.$$

3. Рентгеновское излучение. Поглощение излучения

26. Длина волны линии L_α у вольфрама равна 0,148 нм. Найти постоянную экранирования.

Дано: $\lambda = 1{,}48 \cdot 10^{-10}$ м.

Найти: a.

Решение. В соответствии с законом Мозли

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (1)$$

Для вольфрама $Z = 74$.

Для L-серии $n = 2$.

Для L_α-линии $k = 3$.

Из (1) находим

$$a = Z - \left[\lambda R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (2)$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$a = 74 - \left[1{,}48 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}097 \cdot 10^7\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)\right]^{-1/2} \simeq 7{,}4.$$

27. Определить минимальную длину волны тормозного рентгеновского излучения, если к рентгеновской трубке приложены напряжения 30 кВ, 75кВ.

Дано: $U_1 = 3 \cdot 10^4$ В; $U_2 = 7{,}5 \cdot 10^4$ В.

Найти: λ_1, λ_2.

Решение. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра определяется по формуле $\lambda = \frac{hc}{eU}$. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^4} \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-11} (\text{м});$$

$$\lambda_2 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 7{,}5 \cdot 10^4} \simeq 1{,}66 \cdot 10^{-11} (\text{м}).$$

28. Граничная длина волны k-серии характеристического рентгеновского излучения некоторого элемента равна 0,1284 нм. Определить этот элемент.

Дано: $\lambda = 1{,}284 \cdot 10^{-10}$ м; $a = 1$; $i = 1$; $n = \infty$.

Найти: Z.

Решение. Длина волны λ рентгеновского излучения определяется законом Мозли: $\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где i и n — энергетические уровни, между которыми осуществляется переход электрона. Фотон с граничной длиной волны в k-серии излучается при переходе с уровня $n = \infty$ на уровень $i = 1$.

Тогда $$(Z - a)^2 = \frac{1}{\lambda R'\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\lambda R'};$$

$$Z - a = \sqrt{\frac{1}{\lambda R'}}; \; Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R'}} + a;$$

$$Z = \sqrt{\frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 1{,}284 \cdot 10^{-10}}} + 1 \simeq 26{,}6 + 1 \simeq 27.$$

Этим элементом является кобальт (Co).

29. Найти граничную длину волны k-серии рентгеновского излучения от платинового антикатода.

Дано: $Z = 78$; $a = 1$; $i = 1$; $n = \infty$.

Найти: λ.

Решение. Граничную длину волны λ в k-серии найдем по формуле Мозли: $\frac{1}{\lambda} = R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

$$\lambda = \frac{1}{R'(Z - a)^2\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right)};$$

$$\lambda = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot (78 - 1)^2 \cdot 1} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-11} (\text{м}).$$

30. При каком наименьшем напряжении на рентгеновской трубке с железным антикатодом появляются линии k-серии?

Дано: $Z = 26$; $a = 1$; $n = 1$; $k = 2$.

Найти: U.

Решение. k-линии появляются при переходе электрона со 2-го энергетического уровня на 1-й. Длину волны λ этой линии определим по формуле Мозли: $\frac{1}{\lambda} = R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$.

$$\lambda = \frac{1}{R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)};$$

$$\lambda = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^{-7}(26-1)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \simeq 1{,}94 \cdot 10^{-10}\ (\text{м}).$$

Линия с таким значением λ может появиться, если энергия бомбардирующего электрона $E = eU$ будет не меньше энергии кванта $E = \frac{hc}{\lambda}$. Приравнивая эти выражения, получим:

$$eU = \frac{hc}{\lambda}, \text{ откуда } U = \frac{hc}{e\lambda};$$

$$U = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}94 \cdot 10^{-10}} = 6408\ (\text{В}).$$

31. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к рентгеновской трубке с вольфрамовым антикатодом, чтобы в спектре излучения были все линии k-серии?

Дано: $Z = 74$.

Найти: U.

Решение. Коротковолновая граница λ сплошного рентгеновского спектра связана с разностью потенциалов U соотношением

$$\lambda = \frac{hc}{eU},$$

e — заряд электрона, h — постоянная Планка, c — скорость света. Длина волны рентгеновского излучения λ определяется по формуле Мозли

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Линии k-серии образуются при переходе на 1-й энергетический уровень, т. е. $n = 1$, а $k = \infty$, и тогда

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-a)^2.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{eU}{hc};\ R'(Z-1)^2 = \frac{eU}{hc};\ U = \frac{R'(Z-1)^2 \cdot hc}{e};$$

$$U = \frac{1{,}097 \cdot 10^7 \cdot 73^2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \simeq 73\ (\text{кВ}).$$

32. На поверхность воды падает γ-излучение с длиной волны 0,414 пм. На какой глубине интенсивность излучения уменьшится в 2 раза?

Дано: $\lambda = 4{,}14 \cdot 10^{-13}$ м; $\frac{I_0}{I} = 2$.

Найти: x.

Решение. Согласно закону поглощения λ-излучения веществом,

$$I = I_0 \exp(-\mu x). \qquad (1)$$

Решая уравнение относительно x, найдем

$$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I}. \qquad (2)$$

Для определения коэффициента линейного ослабления вычислим энергию ε фотонов:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) числовые значения, получим

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}14 \cdot 10^{-13}} \simeq 4{,}8 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) = 3\ (\text{МэВ}).$$

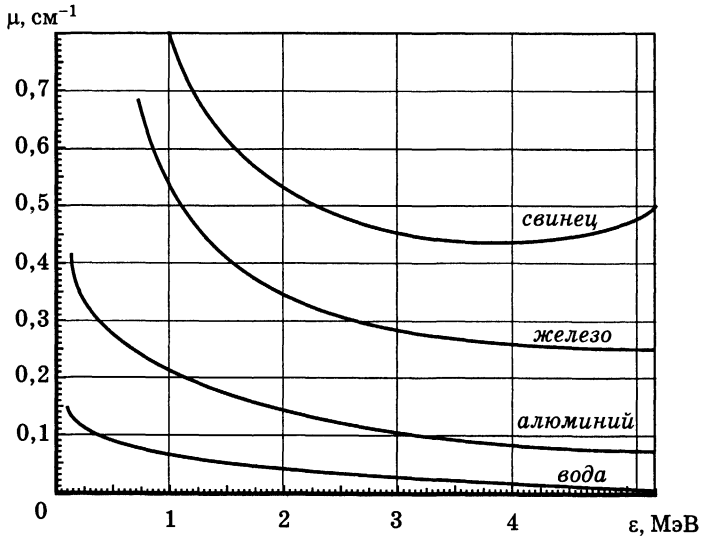


Рис. 54

По графику зависимости линейного коэффициента поглощения γ-лучей μ от их энергии ε (рис. 54) находим

$$\mu = 0{,}03\ (\text{см}^{-1}).$$

Подставляя числовые значения в выражение (2), получим

$$x = \frac{\ln 2}{0{,}03} = \frac{0{,}693}{0{,}03} = 23{,}1\ (\text{см}).$$

33. Через кварцевую пластинку толщиной 5 см пропускаются инфракрасные лучи. Угол падения равен нулю. Известно, что для инфракрасных лучей с длиной волны $\lambda_1 = 2{,}72$ мкм коэффициент линейного ослабления $k_1 = 0{,}2\ \text{см}^{-1}$, а для лучей с $\lambda_2 = 4{,}50$ – $k_2 = 7{,}3\ \text{см}^{-1}$. Определить слои половинного ослабления x_1 и x_2 соответственно для λ_1 и λ_2 и относительное изменение интенсивности этих лучей после прохождения ими кварцевой пластинки.

Дано: $k_1 = 0{,}2\ \text{см}^{-1}$; $k_2 = 7{,}3\ \text{см}^{-1}$; $\lambda_1 = 2{,}72$ мкм; $\lambda_2 = 4{,}50$ мкм; $x = 5$ см.

Найти: x_1, x_2, $\frac{I_0}{I_1}$, $\frac{I_0}{I_2}$.

Решение. Поглощение лучей света в среде определяется законом Бугера, который строго выполняется только для монохроматических лучей: $I = I_0 e^{-kx}$, где I_0 — сила света, входящего в вещество, I — сила света, прошедшего слой вещества, x — толщина слоя поглощающего вещества, k — коэффициент линейного ослабления.

При слое половинного ослабления $I = \frac{1}{2} I_0$, формула закона Бугера примет вид: $\frac{1}{2} I_0 = I_0 e^{-kx}$. Отсюда

$$e^{-kx} = 2, \text{ или } kx = \ln 2.$$

Для лучей с длиной волны λ_1 слой половинного ослабления равен

$$x_1 = \frac{\ln 2}{k_1} = \frac{0{,}693}{0{,}2} \simeq 3{,}47\ (\text{см});$$

для лучей с длиной волны λ_2 слой половинного ослабления равен

$$x_2 = \frac{\ln 2}{k_2} = \frac{0{,}693}{7{,}3} \simeq 0{,}0949\ (\text{см}) \simeq 0{,}95\ (\text{мм}).$$

Таким образом, слой половинного ослабления с длиной волны λ_2 в 3,67 раза меньше, чем для λ_1. Относительное изме-

нение силы света после прохождения слоя x для лучей λ_1 и λ_2 получим из выражения $\frac{I_0}{I} = e^{kx}$. Для лучей с λ_1:

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{k_1 x} = e^{0,2 \cdot 5} = e^1 = 2,72;$$

для лучей с λ_2:

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{k_2 x} = e^{7,3 \cdot 5} = e^{36,5} \simeq 10^{14}.$$

Таким образом, для лучей с длиной волны $\lambda_2 = 4,50$ мкм слой кварца толщиной 5 см практически непрозрачен, в то время как лучи с длиной волны $\lambda_1 = 2,72$ мкм, проходя слой кварца в 5 см, ослабляются в 2,72 раза.

34. На железный экран падает пучок γ-лучей, длина волны которых $0,124 \cdot 10^{-2}$ нм. Найти толщину слоя половинного ослабления γ-излучения в железе.

Дано: $\lambda = 1,24 \cdot 10^{-12}$ м; Fe.

Найти: $x_{1/2}$.

Решение. Энергия γ-квантов

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,24 \cdot 10^{-12}} \simeq 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)} = 1 \text{ (МэВ)}.$$

По графику на рис. 54 находим значение коэффициента линейного поглощения $\mu = 0,5$ см$^{-1}$. Толщина $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления будет $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,693}{0,5} \simeq 1,4$ (см).

35. Определить, как изменится интенсивность узкого пучка лучей при прохождении через экран, состоящий из двух плит: алюминиевой толщиной 10 см и железной — 5 см. Коэффициент линейного ослабления для Al $\mu_1 = 0,1$ см$^{-1}$, для Fe $\mu_2 = 0,3$ см$^{-1}$.

Дано: $x_1 = 10$ см, $\mu_1 = 0,1$ см$^{-1}$, $x_2 = 5$ см, $\mu_2 = 0,3$ см$^{-1}$.

Найти: $\frac{I_0}{I_2}$.

Решение. Интенсивность излучения I_1 после прохождения алюминиевой плиты $I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x_1}$. После прохождения железной плиты интенсивность

$$I_2 = I_1 e^{-\mu_2 x_2} = I_0 e^{-\mu_1 x_1} \cdot e^{-\mu_2 x_2} = I_0 e^{-(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)}.$$

Отсюда $\frac{I_0}{I_2} = e^{(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)} = e^{0,1 \cdot 10 + 0,3 \cdot 5} = e^{2,5} \simeq 12,2$. Интенсивность уменьшается в 12 раз.

36. Какова энергия γ-лучей, если при прохождении через слой железа толщиной 3,15 см интенсивность излучения ослабляется в 4 раза?

Дано: $\frac{I_0}{I} = 4$; $x = 3{,}15$ см; Fe.

Найти: ε.

Решение. Интенсивность излучения I после прохождения слоя железа толщиной x определяется по формуле $I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$.

$$\frac{I_0}{I} = e^{\mu x};\ \ln\frac{I_0}{I} = \mu x;\ \mu = \frac{\ln\frac{I_0}{I}}{x} = \frac{\ln 4}{3{,}15} \simeq 0{,}44\ (\text{см}^{-1}).$$

По графику на рис. 52 находим ε = 1,4 МэВ.

37. Как изменится степень ослабления γ-лучей при прохождении через свинцовый экран, если длина волны этих лучей $4{,}1 \cdot 10^{-13}$ м и $8{,}2 \cdot 10^{-13}$ м, толщина экрана 1 см?

Дано: $\lambda_1 = 4{,}1 \cdot 10^{-13}$ м; $\lambda_2 = 8{,}2 \cdot 10^{-13}$ м; $x = 1$ см.

Найти: $\frac{I_1}{I_2}$.

Решение. Энергия γ-квантов равна:

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}1 \cdot 10^{-13}} \simeq 4{,}9 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) \simeq 3\ (\text{МэВ});$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{8{,}2 \cdot 10^{-13}} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{-13}\ (\text{Дж}) \simeq 1{,}5\ (\text{МэВ}).$$

По графику на рис. 54 находим коэффициент линейного ослабления $\mu_1 = 0{,}45$ см$^{-1}$, $\mu_2 = 0{,}56$ см.

Закон поглощения излучения в веществе $I = I_0 e^{-\mu x}$, где I_0 и I — интенсивности падающего на слой толщиной x и прошедшего излучений. Тогда

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 x};\ I_2 = I_0 e^{-\mu_2 x};\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-\mu_1 x}}{e^{-\mu_2 x}} = e^{(\mu_2 - \mu_1)x} = e^{0{,}11} = 1{,}12.$$

Интенсивность коротковолнового излучения после прохождения свинцового экрана будет в 1,12 раза выше.

38. Рассчитать толщину защитного водяного слоя, который ослабляет интенсивность излучения с энергией 1,6 МэВ в 5 раз.

Дано: ε = 1,6 МэВ; $\frac{I_0}{I} = 5$.

Найти: x.

Решение. Закон ослабления излучения при прохождении слоя толщиной x имеет вид $I = I_0 e^{-\mu x}$. По графику на рис. 54 находим $\mu = 0{,}05$ см$^{-1}$.

Тогда $\frac{I_0}{I} = e^{\mu x} = 5$; $\ln 5 = \mu x$; $x = \frac{\ln 5}{\mu} = \frac{\ln 5}{0{,}05} \simeq 32$ (см).

4. Дефект массы и энергия связи ядра. Радиоактивность. Ядерные реакции

39. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$.

Дано: $m_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}00783$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.; $m_{{}^{16}_{8}\mathrm{O}} = 15{,}99492$ а. е. м.; $Z = 8$; $A = 16$.

Найти: Δm, $E_{\text{св}}$, $\varepsilon_{\text{св}}$.

Решение. Дефект массы Δm ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}. \qquad (1)$$

Формулу (1) можно также записать в виде

$$\Delta m = Zm_{{}^{1}_{1}\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}}, \qquad (2)$$

где $m_{\text{а}}$ — масса атома, дефект массы ядра которого определяется.

Подставляя в (2) числовые данные, получим

$$\Delta m = 0{,}13708 \text{ а. е. м.}$$

Энергия связи ядра $E_{\text{св}}$ определяется по формуле

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m. \qquad (3)$$

Если дефект массы Δm выражать в а. е. м., а энергию связи $E_{\text{св}}$ в МэВ, то формула (3) примет вид

$$E_{\text{св}} = 931 \Delta m. \qquad (4)$$

Подставляя в (4) числовые значения, получим

$$E_{\text{св}} = 931 \cdot 0{,}13708 \simeq 128 \text{ (МэВ)}.$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{\text{св}}$ вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}. \qquad (5)$$

Проводя вычисления, получим

$$\varepsilon_{\text{св}} = \frac{128}{16} = 8 \text{ (МэВ)}.$$

40. Вычислить дефект массы, энергию связи ядра и удельную энергию связи для элемента $^{108}_{47}\mathrm{Ag}$.

Дано: $m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}00783$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.; $m_{\mathrm{Ag}} = 107{,}869$ а. е. м.; $Z = 47$; $A = 108$.

Найти: Δm, $E_{\text{св}}$, $\varepsilon_{\text{св}}$.

Решение. Дефект массы ядра Δm равен

$$\Delta m = Z m_{^1_1\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_{\mathrm{Ag}};$$

$$\Delta m = 47 \cdot 1{,}00783 + (108 - 47) \cdot 1{,}00867 - 107{,}869 = 1{,}028 \text{ (а. е. м.)}.$$

Энергия связи

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2 = 1{,}028 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 15{,}36 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)} \simeq 960 \text{ (МэВ)}.$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{\text{св}} = \dfrac{E_{\text{св}}}{A} = \dfrac{960}{108} \simeq 8{,}9$ (МэВ).

41. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи для ядра элемента $^{24}_{12}\mathrm{Mg}$.

Дано: $Z = 12$; $A = 24$; $m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}00783$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.

Найти: Δm, $E_{\text{св}}$, $\varepsilon_{\text{св}}$.

Решение. Ядро магния содержит 12 протонов и 12 нейтронов. Дефект массы ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Z m_{^1_1\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_{\mathrm{Mg}}.$$

$$\Delta m = 12 \cdot 1{,}00783 + 12 \cdot 1{,}00867 - 23{,}98504 \simeq 0{,}213 \text{ а. е. м.};$$

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ (кг)};$$

$$\Delta m = 0{,}213 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 3{,}5 \cdot 10^{-28} \text{ (кг)}.$$

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2 = 3{,}5 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 3{,}2 \cdot 10^{-11} \text{ (Дж)} = 197 \text{ (МэВ)}.$$

Удельная энергия связи $\varepsilon_{\text{св}} = \dfrac{E_{\text{св}}}{A}$; $\varepsilon_{\text{св}} = \dfrac{197}{24} = 8{,}21$ (МэВ).

42. Ядро, состоящее из 92 протонов и 143 нейтронов, выбросило α-частицу. Какое ядро образовалось при α-распаде? Определить дефект массы и энергию связи образовавшегося ядра.

Дано: $Z = 92$; $A = 92 + 143$; $N = 143$.

Найти: X, Δm, $E_{\text{св}}$.

Решение. Реакция α-распада имеет вид

$$^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{231}_{90}\mathrm{X},$$

т. е. образовалось ядро тория $^{231}_{90}\mathrm{Th}$; $m_{\mathrm{Th}} = 231{,}02944$ а. е. м.

Дефект массы

$$\Delta m = Z m_{^1_1\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_{\mathrm{Th}};$$

$\Delta m = 90 \cdot 1{,}00783 + 141 \cdot 1{,}00867 - 231{,}02944 \simeq 1{,}898$ (а. е. м.) $= 3{,}15 \cdot 10^{-27}$ (кг). Здесь $m_{^1_1\mathrm{H}}$, m_n — массы водорода и нейтрона.

Энергия связи ядра тория $E_{\text{св}} = \Delta m c^2 = 3{,}15 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq$ $\simeq 2{,}84 \cdot 10^{-10}$ (Дж) $= 1775$ (МэВ).

43. В какой элемент превращается $^{238}_{92}\mathrm{U}$ после трех α-распадов и двух β-распадов?

Дано: $Z = 92$; $A = 238$.

Найти: Y.

Решение. Каждый α-распад сопровождается уменьшением зарядового числа Z на 2 и уменьшением массового числа A на 4. Каждый β-распад сопровождается увеличением зарядового числа Z на 1, а массовое число A остается без изменения. Таким образом, зарядовое число Z' полученного элемента будет равно $Z' = Z - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 92 - 6 + 2 = 88$, а массовое число $A' = A - 3 \cdot 4 = 238 - 12 = 226$, т. е. получили элемент радий $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

44. Период полураспада $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ равен примерно 5,3 года. Определить постоянную распада и среднюю продолжительность жизни атомов этого изотопа.

Дано: $T = 5{,}3$ года.

Найти: λ, τ.

Решение. Постоянная радиоактивного распада λ и период полураспада T связаны соотношением $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{0{,}693}{5{,}3} \simeq$ $\simeq 0{,}13$ (год$^{-1}$).

Среднее время жизни радиоактивного изотопа $\tau = \dfrac{1}{\lambda} \simeq$ $\simeq 7{,}7$ (лет).

45. За год распалось 60% некоторого исходного радиоактивного элемента. Определить период полураспада этого элемента.

Дано: $t = 1$ год; $\frac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}6$.

Найти: $T_{1/2}$.

Решение. Закон радиоактивного распада имеет вид

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

где N_0 — исходное число радиоактивных ядер, N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t, λ — постоянная радиоактивного распада, которая связана с полупериодом распада $T_{1/2}$ соотношением $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. По условию задачи $\frac{N_0 - N}{N_0} =$

$= 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - \frac{N_0 \cdot e^{\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 0{,}6$; $e^{-\lambda t} = 0{,}4$; $e^{\lambda t} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$;

$\lambda t = \ln 2{,}5$; $\lambda = \frac{\ln 2{,}5}{t}$.

Тогда $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln 2{,}5} = \frac{\ln 2 \cdot 1}{\ln 2{,}5} \simeq 0{,}76$ (года).

46. Сколько ядер, содержащихся в 1 г трития ${}^3_1\mathrm{H}$, распадается за среднее время жизни этого изотопа?

Дано: $m = 10^{-3}$ кг; $t = \tau$.

Найти: N'.

Решение. Согласно закону радиоактивного распада

$$N = N_0 \exp(-\lambda t). \qquad (1)$$

Среднее время жизни τ радиоактивного изотопа есть величина, обратная постоянной распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2)$$

По условию задачи $t = \tau$. Подставляя в (1) вместо t значение τ из (2), получим

$$N = \frac{N_0}{e}. \qquad (3)$$

Число распавшихся атомов за время $t = \tau$ равно

$$N' = N_0 - N = N_0\left(1 - \frac{1}{e}\right). \qquad (4)$$

Найдем число атомов N_0, содержащихся в массе $m = 1$ г изотопа $^3_1\mathrm{H}$:

$$N_0 = \frac{m}{M} N_\mathrm{A}, \tag{5}$$

где $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса изотопа $^3_1\mathrm{H}$, N_A — число Авогадро.

С учетом (5) выражение (4) примет вид

$$N' = \frac{m}{M} N_\mathrm{A}\left(1 - \frac{1}{e}\right). \tag{6}$$

Подставляя в (6) числовые значения, получим

$$N' = \frac{10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 10^{-3}}\left(1 - \frac{1}{2{,}72}\right) \simeq 1{,}27 \cdot 10^{23}.$$

47. Период полураспада $^{60}_{27}\mathrm{Co}$ равен 5,3 года. Определить, какая доля первоначального количества ядер этого изотопа распадается через 5 лет.

Дано: $T = 5{,}3$ года; $t = 5$ лет.

Найти: $\dfrac{N_0 - N}{N_0}$.

Решение. Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}, \text{ где } \lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Число распавшихся ядер будет $N_0 - N$, а их доля $\dfrac{N_0 - N}{N_0} \cdot 100\%$;

$\dfrac{N_0 - N}{N_0} = \dfrac{N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t}}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{\frac{\ln 2}{T} t}$; $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{\frac{\ln 2}{5{,}3} \cdot 5} \simeq 1 - 0{,}52 = 0{,}48$ или 48% первоначального числа ядер распадется через 5 лет.

48. Период полураспада радиоактивного аргона $^{41}_{18}\mathrm{Ar}$ равен 110 мин. Определить время, в течение которого распадается 25% начального количества ядер.

Дано: $T = 110$ мин; $\dfrac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}25$.

Найти: t.

Решение. Закон радиоактивного распада $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Из условия задачи $\frac{N}{N_0} = 0{,}75$. Учитывая, что $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, получаем:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t};\ \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t = -\frac{\ln 2}{T} t,$$

откуда $$t = -\frac{T \ln \frac{N}{N_0}}{\ln 2};\ t = -\frac{110 \cdot (-0{,}288)}{0{,}693} \simeq 46 \text{ (мин)}.$$

49. Определить постоянную распада и число атомов радона, распавшихся в течение суток, если первоначальная масса радона 10 г. Период полураспада $^{222}_{86}\text{Rn}$ равен 3,82 сут.

Дано: $t = 1$ сут; $T_{1/2} = 3{,}82$ сут; $m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг.

Найти: λ, N_1.

Решение. Число атомов радона

$$N_0 = N_A \frac{m}{M},$$

где N_A — число Авогадро, M — молярная масса радона, $M = 222$ кг/кмоль, m — масса радона.

Закон радиоактивного распада $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, где N — число ядер, не распавшихся к моменту времени t, λ — постоянная распада, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$. Число атомов, распавшихся за $t = 1$ сут, будет

$$N_1 = N_0 - N = N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = N_A \times$$

$$\times \frac{m}{M}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}\right) = 6{,}02 \cdot 10^{26} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{222} \cdot \left(1 - e^{-\frac{0{,}693}{3{,}82} \cdot 1}\right) \simeq$$

$$\simeq 4{,}3 \cdot 10^{21} \text{ (атомов)}.$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{3{,}82} \simeq 0{,}181 \text{ (сут}^{-1}\text{)}.$$

50. Вычислить энергию ядерной реакции

$$^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow p + {}^7_3\text{Li}.$$

Выделяется или поглощается энергия при этой реакции?

Решение. Энергия ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = c^2(m_1 + m_2 - \Sigma m_i'), \qquad (1)$$

где m_1 и m_2 — массы частиц, вступающих в реакцию, $\Sigma m_i'$ — сумма масс частиц, образовавшихся в результате реакции.

Если массу частиц выражать в а. е. м., а энергию реакции в МэВ, то формула (1) примет вид

$$Q = 931(m_1 + m_2 - \sum m_i'). \qquad (2)$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать массы атомов вместо масс их ядер. Из справочных данных находим:

$$m_{{}_2^4\mathrm{He}} = 4{,}00260 \text{ а. е. м.},$$

$$m_{{}_1^1\mathrm{H}} = 1{,}00783 \text{ а. е. м.},$$

$$m_{{}_3^7\mathrm{Li}} = 7{,}01601 \text{ а. е. м.}$$

Дефект массы реакции равен

$$(2m_{{}_2^4\mathrm{He}} - m_{{}_1^1\mathrm{H}} - m_{{}_3^7\mathrm{Li}}) = -0{,}01864 \text{ а. е. м.}$$

Подставляя значение дефекта массы реакции в (2), получим

$$Q = 931(-0{,}01864) \simeq -17{,}4 \text{ (МэВ)}.$$

Поскольку $Q < 0$, то энергия в результате реакции поглощается.

51. Вычислить энергию термоядерной реакции

$${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \to {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1n\,.$$

Дано: $m_{{}_1^2\mathrm{H}} = 2{,}0141$ а. е. м.; $m_{{}_1^3\mathrm{H}} = 3{,}01605$ а. е. м.; $m_{{}_2^4\mathrm{He}} = 4{,}0026$ а. е. м.; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.

Найти: E.

Решение. Энергия ядерной реакции определяется по формуле $E = \Delta mc^2$;

$$E = c^2(m_{{}_1^2\mathrm{H}} + m_{{}_1^3\mathrm{H}} - m_{{}_2^4\mathrm{He}} - m_n) = c^2(2{,}0141 + 3{,}01605 -$$
$$- 4{,}0026 - 1{,}00867) = c^2 \cdot 0{,}01888 = 9 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}01888 \times$$
$$\times 1{,}66 \cdot 10^{-27} \simeq 28{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)} \simeq 17{,}6 \text{ (МэВ)}.$$

52. Вычислить энергию ядерной реакции

$${}_1^2\mathrm{H} + {}_3^7\mathrm{Li} \to 2 \cdot {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1n\,.$$

Дано: $m_{{}_1^2\mathrm{H}} = 2{,}0141$; $m_{\mathrm{Li}} = 7{,}01605$; $m_{\mathrm{He}} = 4{,}0026$; $m_n = 1{,}00867$ а. е. м.

Найти: E.

Решение. Энергия E ядерной реакции определяется по формуле $E = \Delta mc^2$. Δm равен разности масс продуктов, вступающих в реакцию и полученных в результате реакции:

$$\Delta m = m_{{}^{2}_{1}\mathrm{H}} + m_{\mathrm{Li}} - 2m_{\mathrm{He}} - m_n =$$

$$= 2{,}0141 + 7{,}01605 - 2 \cdot 4{,}0026 - 1{,}00867 = 0{,}01628 \text{ (а. е. м.)},$$

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Энергия ядерной реакции $E = \Delta mc^2 = 0{,}01628 \cdot 1{,}66 \times \times 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ (Дж) $= 15{,}2$ (МэВ).

53. Какое количество энергии освобождается при соединении одного протона и двух нейтронов в одно ядро?

Решение. Результатом ядерной реакции синтеза

$${}^{1}_{1}p + 2 \cdot {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H}$$

является образование ядра трития. Энергетический эффект ядерной реакции $E = \Delta mc^2$;

$$\Delta m = m_p + 2m_n - m_{{}^{3}_{1}\mathrm{H}}.$$

Масса протона $m_p = 1{,}00728$ а. е. м., масса нейтрона $m_n = 1{,}00867$ а. е. м., масса трития $m_{{}^{3}_{1}\mathrm{H}} = 3{,}01605$ а. е. м.

Тогда $E = \Delta mc^2 = (1{,}00728 + 2 \cdot 1{,}00867 - 3{,}01605) \cdot 1{,}66 \times \times 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 12{,}8 \cdot 10^{-13}$ (Дж) $\simeq 8$ (МэВ).

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить частоту света, излучаемого двукратно ионизованным атомом лития при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом 2, если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз. **Ответ:** $6{,}58 \cdot 10^{15}$ Гц.

2. Какую минимальную энергию необходимо сообщить электрону в атоме водорода, чтобы перевести его из основного состояния во второе возбужденное? **Ответ:** 12,1 эВ.

3. Определить длину волны кванта, излучаемого атомом водорода при переходе с одного энергетического уровня на другой, если при этом энергия атома уменьшилась на 10,2 эВ. **Ответ:** 0,12 мкм.

4. Вычислить длину волны де Бройля для электрона, прошедшего разность потенциалов 2 кВ. **Ответ:** $2{,}75 \cdot 10^{-11}$ м.

5. Вычислить длину волны де Бройля для пули массой 0,015 кг, движущейся со скоростью 500 м/с. **Ответ:** $8{,}8 \cdot 10^{-35}$ м.

6. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра $^{14}_{7}\mathrm{N}$. **Ответ**: 0,112 а. е. м.; 104,7 МэВ.

7. Вычислить энергию связи ядра $^{7}_{3}\mathrm{Li}$. **Ответ**: 39,3 МэВ.

8. Вычислить энергетический эффект реакции

$$^{3}_{2}\mathrm{He} + n \rightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + p.$$

Ответ: 1,3 МэВ.

9. Вычислить энергетический эффект реакции

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n.$$

Ответ: 15,028 МэВ.

10. Неопределенность скорости электрона составила $\Delta\upsilon = 10$ м/с. Определить неопределенность координаты электрона, если он движется со скоростью 100 м/с. **Ответ**: $5{,}8 \cdot 10^{-6}$ м.

11. Элементарная частица в потенциальной яме находится в возбужденном состоянии. Какова вероятность нахождения частицы в середине потенциальной ямы? Ответ поясните рисунком. **Ответ**: нуль.

12. Наибольшая длина волны K_α-серии рентгеновского излучения 0,21 нм. Из какого материала сделан антикатод? **Ответ**: Mn.

13. Какую наименьшую разность потенциалов надо приложить к рентгеновской трубке с медным антикатодом, чтобы в спектре излучения меди были видны все линии K_α-серии? **Ответ**: 10,7 кэВ.

14. Пластина толщиной 1 см ослабляет интенсивность γ-излучения в два раза. Во сколько раз уменьшится интенсивность γ-излучения при прохождении его через 10 пластин? **Ответ**: 1027 раз.

15. Период полураспада радиоактивного вещества равен 5,3 года. Определить, в течение какого времени масса этого вещества уменьшится в 10 раз. **Ответ**: 17,6 года.

16. Постоянная распада радиоактивного элемента $^{26}_{13}\mathrm{Al}$ равна $\lambda = 2{,}97 \cdot 10^{-14}$ с$^{-1}$. Определить продолжительность жизни и период полураспада этого элемента. **Ответ**: $1{,}07 \cdot 10^{6}$ лет; $7{,}4 \cdot 10^{5}$ лет.

Приложение

1. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Числовое значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с)^2
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(К · моль)
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Стефана— Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)
Постоянная Вина в первом законе (смещения)	b_1	$2{,}89 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Вина во втором законе	b_2	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^2 · К^5)
Постоянная Планка	h $\hbar$	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга	R'	$1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$
Боровский радиус	a	$0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	λ_C	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж = = 13,6 эВ
Атомная единица массы Энергия, соответствующая 1 а. е. м.	а. е. м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг 931,50 МэВ
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Масса покоя протона	m_{0p}	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
Объем 1 моля идеального газа при нормальных условиях (T_0 = 273,15 К, p_0 = = 101325 Па)	V_0	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Магнетон Бора	μ	$9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерный магнетон	μ	$5{,}05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
Постоянная Фарадея	F	9,65 Кл/моль

2. Некоторые астрономические величины

Радиус Земли (среднее значение)	$6{,}38 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца (среднее значение)	$6{,}95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны (среднее значение)	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние между центрами Земли и Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние между центрами Солнца и Земли	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч и 43 мин

3. Удельное сопротивление, 10^8 Ом · м

Вольфрам	5,5	Никелин	40,0
Железо	9,8	Нихром	110,0
Медь	1,75	Серебро	1,6

4. Диэлектрическая проницаемость (относительная) вещества

Бакелит	4,0	Парафин	2,2
Вода	81,0	Слюда	6,0
Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0

5. Показатель преломления

Алмаз	2,42	Кварц	1,55
Вода	1,33	Сероуглерод	1,63
Глицерин	1,47	Скипидар	1,48
Каменная соль	1,54	Стекло	1,52

6. Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра, нм

Фиолетовый	400—450	Желтый	560—590
Синий	450—480	Оранжевый	590—620
Голубой	480—500	Красный	620—760
Зеленый	500—560		

7. Масса m и энергия E_0 покоя некоторых элементарных частиц и легких ядер

Частицы	m		E_0	
	а. е. м.	10^{27}, кг	МэВ	10^{10}, Дж
Электрон	$5{,}486 \cdot 10^{-4}$	0,00091	0,511	0,00082
Протон	1,00728	1,6726	938,28	1,50
Нейтрон	1,00867	1,675	939,57	1,51
Дейтрон	2,01355	3,3325	1876,5	3,00
α-частица	4,0015	6,6444	3726,2	5,96

8. Работа выхода электронов из металла, эВ

Алюминий	3,7	Никель	4,8
Вольфрам	4,5	Платина	6,3
Литий	2,3	Цезий	1,8
Медь	4,4	Цинк	4,0

9. Периоды полураспада некоторых радиоактивных элементов

$^{45}_{20}$Ca	164 сут	$^{235}_{92}$U	$7{,}1 \cdot 10^8$ лет
$^{90}_{38}$Sr	27 лет	$^{238}_{92}$U	$4{,}5 \cdot 10^9$ лет
$^{210}_{84}$Po	138 сут	$^{226}_{86}$Ra	1590 лет
$^{222}_{86}$Rn	3,82 сут	$^{3}_{1}$H	12 лет

10. Потенциал ионизации, эВ

Водород	13,6
Ртуть	10,4

11. Плотность жидкостей, 10^{-3} кг/м^3

Вода (при 4 °С)	1	Масло	0,9
Глицерин	1,26	Ртуть	13,6
Керосин	0,8	Спирт	0,8

12. Плотность газов (при нормальных условиях), кг/м^3

Азот	1,25	Воздух	1,29
Аргон	1,28	Гелий	0,18
Водород	0,09	Кислород	1,43

13. Плотность твердых тел, 10^{-3} кг/м^3

Твердое тело	10^{-3} кг/м^3
Алюминий	2,7
Вольфрам	19,75
Железо (сталь)	7,85
Константан	8,9
Лед	0,92
Медь	8,8
Никель	8,8
Нихром	8,4
Фарфор	2,3

14. Эффективный диаметр молекулы газов, 10^{10} м

Азот	3,1	Воздух	3,0
Аргон	1,78	Гелий	1,9
Водород	2,3	Кислород	2,9

15. Удельная теплота плавления, 10^{-4} Дж/кг

Лед	33,5
Свинец	2,3

16. Удельная теплота парообразования, 10^{-5} Дж/кг

Вода	22,6
Эфир	6,68

17. Удельная теплоемкость, 10^{-2} Дж/(кг • К)

Вода	41,9	Нихром	2,20
Лед	21,0	Свинец	1,26

18. Температурный коэффициент сопротивления проводников, 10^3 К

Вольфрам	5,2
Медь	4,2
Никелин	0,1

19. Массы изотопов некоторых нейтральных атомов, а. е. м.

Элемент системы	Изотоп	Масса
Водород	$^{1}_{1}H$	1,00783
	$^{2}_{1}H$	2,01410
	$^{3}_{1}H$	3,01605
Гелий	$^{3}_{2}He$	3,01605
	$^{4}_{2}He$	4,00260
Литий	$^{7}_{3}Li$	7,01601
Бериллий	$^{7}_{4}Be$	7,01169
Бор	$^{10}_{5}B$	10,01294
	$^{11}_{5}B$	11,00931
Азот	$^{14}_{7}N$	14,00307
Кислород	$^{16}_{8}O$	15,99492
	$^{17}_{8}O$	16,99913
Алюминий	$^{27}_{12}Al$	26,98135
Кремний	$^{27}_{14}Si$	26,81535
Фосфор	$^{33}_{15}P$	32,97174
Сера	$^{33}_{16}S$	32,97146
Железо	$^{56}_{26}Fe$	55,94700
Медь	$^{64}_{29}Cu$	63,5400
Вольфрам	$^{184}_{74}W$	183,8500
Магний	$^{24}_{12}Mg$	23,98504
	$^{27}_{12}Mg$	26,98436
Кальций	$^{48}_{20}Ca$	47,95236
Серебро	$^{108}_{47}Ag$	107,869
Радий	$^{226}_{88}Ra$	226,0254
Торий	$^{232}_{90}Th$	232,038
Уран	$^{238}_{92}U$	238,0508

Содержание

Предисловие 3

ЧАСТЬ 1
Физические основы механики

Основные формулы 4
Примеры решения задач 7
1. Кинематика и динамика поступательного движения 7
2. Кинематика и динамика вращательного движения. . 17
3. Импульс. Работа. Энергия. Законы сохранения 24
4. Элементы механики жидкостей 37
5. Элементы специальной теории относительности 39
Задачи для самостоятельного решения. 43

Часть 2
Основы молекулярной физики и термодинамики

Основные формулы 45
Примеры решения задач 47
1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов 47
2. Основы термодинамики 69
3. Реальные газы и жидкости 97
Задачи для самостоятельного решения. 103

Часть 3
Электричество и магнетизм

Основные законы и формулы 105
Примеры решения задач 108
1. Электростатика 108
2. Постоянный электрический ток 138
3. Магнитное поле. Индукция и напряженность магнитного поля 146
4. Законы электромагнетизма 155
5. Электромагнитная индукция. Самоиндукция. Энергия магнитного поля 163
6. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля 173
Задачи для самостоятельного решения. 175

Часть 4
Колебания и волны

Основные формулы 181
Примеры решения задач 184
1. Механические колебания и волны 184

2. Электромагнитные колебания и волны 196
3. Волновые свойства света 203
Задачи для самостоятельного решения 229

Часть 5
Квантовая природа излучения

Основные уравнения и формулы 232
Примеры решения задач 233
1. Тепловое излучение 233
2. Фотоны. Давление света. Фотоэффект. Эффект Комптона 235
Задачи для самостоятельного решения 249

Часть 6
Элементы квантовой механики, атомной и ядерной физики

Основные уравнения и формулы 250
Примеры решения задач 252
1. Электронные оболочки атома. Теория Бора 252
2. Элементы квантовой механики 254
3. Рентгеновское излучение. Поглощение излучения . . 266
4. Дефект массы и энергия связи ядра. Радиоактивность. Ядерные реакции 273
Задачи для самостоятельного решения 280
Приложение 282