ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Основные теоретические сведения

Прямые измерения

Одной из важнейших задач физического эксперимента являются измерения величин. Процесс измерения состоит в том, что измеряемую величину сравнивают с другой величиной, принятой за эталон. Измерения, в процессе которых искомая величина определяется с помощью специально предназначенного для этого прибора, называются прямыми. Они никогда не бывают абсолютно точными. Всегда возникает разброс результатов измерений, что требует оценки погрешности (ошибки)- обязательного элемента любого эксперимента. Род и причины погрешностей разнообразны и необходимы многочисленные эксперименты, чтобы их систематизировать.

Среди множества ошибок измерений выделим следующие:

- **систематические погрешности-** это погрешности, являющиеся следствием неправильной калибровки (сбитый ноль прибора, тепловое расширение линейки.), ошибочности метода измерений и т.п. При наличии такого типа погрешностей измеренное значение отклоняется от истинного значения в одну и ту же сторону и на одну и туже величину. Повторными измерениями эти ошибки не уменьшаются, однако их можно оценить методом сравнения результатов измерений заданной величины каким-либо прибором с измерениями, полученными исправным прибором (с большей степенью точности).
- **случайные погрешности** вносятся изменчивыми условиями эксперимента, несовершенством органов чувств и трудно учитываемыми условиями эксперимента, ограниченной точностью и т.п. Случайные ошибки уменьшаются с ростом числа измерений пропорционально $1/\sqrt{n}$, (где n - число измерений в одинаковых условиях) и подчиняются законам теории вероятности и математической статистики. Чаще всего случайные погрешности проявляются в виде разброса (рассеяния) показаний прибора. В результате этого разброса измеряемая величина случайным образом отклоняется от истинного значения в произвольную сторону на произвольную величину.
- **промахи-** погрешности, чаще всего возникающие вследствие невнимательности человека или недостаточной его квалификации и опыта. Их можно наблюдать, например, при неправильном отсчете измеряемого значения (неправильное определение цены деления прибора). Кроме того, к грубым погрешностям могут привести внезапные сильные внешние влияния на измерительное устройство, повреждения или помехи, которые нельзя считать субъективными.
- **приборные погрешности-** этот тип погрешностей обусловлен тем, что практически любое измерительное устройство обладает ограниченной степенью точности, т.е. ,например, измерительной линейкой с ценой деления 1см нельзя измерить длину стола с точностью до одного миллиметра. Практически для большинства измерительных устройств (за исключением электроизмерительных приборов) в качестве приборной погрешности принимается **половина его цены деления**.
- **погрешности округления -** связаны с тем, что в расчетах приходится те или иные величины округлять до определенного десятичного разряда.

В методах математической статистики для обработки результатов измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, используется понятие генеральной совокупности значений измеряемой величины и выборки. Например, при измерении времени между двумя событиями или длины предмета, мы, в принципе, можем получить значения, заключенные в интервале $(0, \infty)$. Множество всех допустимых значений, которые может принимать та или иная величина, называется ее генеральной совокупностью. Производя n измерений, мы получим n значений измеряемой величины: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Данная совокупность значений называется выборкой для величины x объемом n. Очевидно, что выборка переходит в генеральную совокупность, если ее объем, т.е. число измерений n, стремится к бесконечности. Введем понятие среднего значения выборки и ее дисперсии. **Средним значением** выборки объемом n для величины x называется величина, вычисляемая из соотношения:

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{0.1}$$

Далее введем понятие дисперсии выборки, являющейся мерой отклонений измеренных значений x от их среднего значения $< x >$. **Дисперсию выборки** находят из следующего соотношения

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - < x >)^2 + (x_2 - < x >)^2 + \ldots + (x_n - < x >)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n-1}. \tag{0.2}$$

Величина, которая является мерой отклонения среднего значения выборки от истинного значения измеряемой величины, называется дисперсией среднего значения. Дисперсия среднего значения обозначается $S^2_{<x>}$ и вычисляется по формуле:

$$S^2_{<x>} = \frac{(x_1 - <x>)^2 + (x_2 - <x>)^2 + \ldots + (x_n - <x>)^2}{n \cdot (n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2}{n \cdot (n-1)} . \qquad (0.3)$$

Величина $S_{<x>}$, равная $S_{<x>} = \sqrt{S^2_{<x>}}$ называется **среднеквадратичным отклонением** среднего значения от истинного значения x_0. Очевидно, что среднее значение и дисперсия зависят как от измеренных значений x_i, так и от объема выборки n. Причем, при увеличении n до бесконечности среднее значение и дисперсия выборки стремятся, соответственно, к среднему значению и дисперсии генеральной совокупности. Дисперсию генеральной совокупности обычно обозначают σ^2_x.

Результаты измерений величины x являются случайными числами, поскольку при измерениях присутствуют случайные погрешности измерений. Наиболее часто вероятность получения результата измерений описывается распределением Гаусса. Плотностью распределения величины x называется функция $\varphi(x)$, такая, что вероятность dp получить измеряемую величину в интервале от x до $x + dx$ равна $dp = \varphi(x) \cdot dx$,

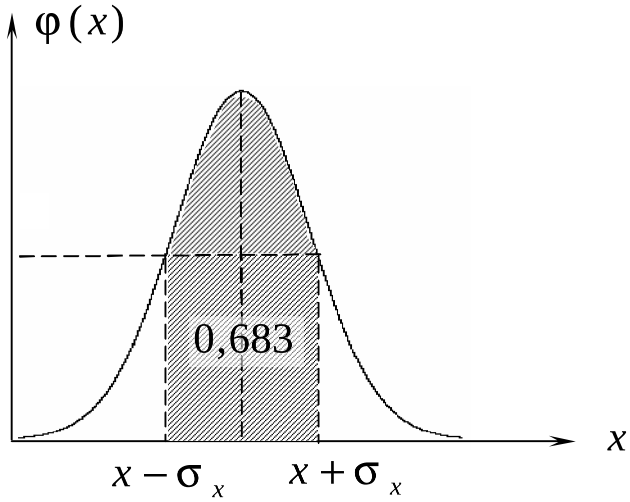
$$\text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x - x_{ист})^2}{2 \cdot \sigma_x^2}} \qquad (0.4)$$

На рис 0.1 представлен график функции $\varphi(x)$. Важнейшим свойством ее является то, что вероятность получения результата однократного измерения $x_1 \le x \le x_2$ равна площади под кривой в пределах x_1 до x_2. Например, в пределах от $x_0 - \sigma_x$ до $x_0 + \sigma_x$ вероятность равна **0.683**, в пределах от $x_0 - 2 \cdot \sigma_x$ до $x_0 + 2 \cdot \sigma_x$ она равна **0.954** и в пределах $x_0 - 3 \cdot \sigma_x$, до $x_0 + 3 \cdot \sigma_x$ она будет **0.997**. Следовательно, из **1000** измерений **683** наиболее вероятно попадут в интервал $x_0 \pm \sigma_x$, **954** -в интервал $x_0 \pm 2 \cdot \sigma_x$, а **997** соответственно в интервал $x_0 \pm 3 \cdot \sigma_x$.

Рисунок 0.1. График функции распределения Гаусса.

Целью физического эксперимента при проведении прямых измерений является определение интервала, в котором находится истинное значение величины x (доверительного интервала). Чтобы записать данный интервал по результатам n измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, предварительно введем параметр, определяемый по формуле

$$t = \frac{|x - <x>|}{S_{<x>}} \qquad (0.5)$$



где x - истинное значение измеряемой величины.

Из данного соотношения видно, что параметр t также является величиной случайной, поскольку находится из случайных величин $<x>$ и $S_{<x>}$. Следовательно, для всевозможных значений параметра t также существует своя функция распределения. Впервые данная зависимость была найдена Стьюдентом и получила название функции распределения Стьюдента, а параметр t называется параметром Стьюдента. Аналитическое выражения функции распределения параметра Стьюдента имеет следующий вид:

$$S(n-1,t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$, где $\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}\cdot e^{-u}\cdot du$ гамма функция.

График функции распределения параметра Стьюдента представлен на рисунке 0.2. Зная данное распределение и используя следующее равенство $P(|t|\le t_k)=\int_{-t_k}^{t_k}S(n-1,x)\cdot dx$ можно вычислить вероятность $P(|t|\le t_k)$ того, что параметр t не превосходит значения t_k.

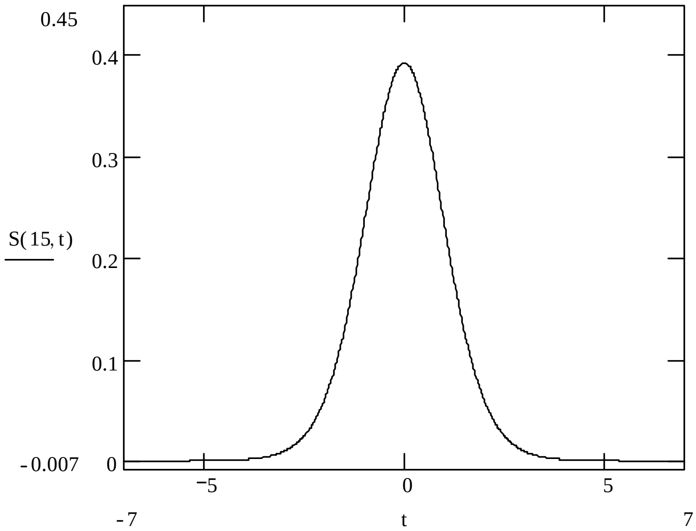


Рисунок 0.2. График функции распределения параметра Стьюдента.

Обычно на практике поступают по иному. Зная количество измерений n, и задавая вероятность $P(|t|\le t_k)$, находят величину параметра t_k. Значения данного параметра t_k приведены в **табл. 0.1**. Данные таблицы 0.1 на практике используют следующим образом. Зная объем выборки n и задавая значение вероятности p, с помощью **табл. 0.1** находят параметр $t_{p,k}$, где k-число степеней свободы ($k=n-1$). После чего из соотношения (0.5) легко получить искомый интервал

$$x=\langle x\rangle\pm t\cdot S_{\langle x\rangle} \qquad (0.6)$$

при p, равном заданному значению, и соответствующем k.

Данная запись означает то, что истинное значение величины x с вероятностью p, попадает в указанный интервал. В том случае, если при проведении прямых измерений присутствуют кроме случайных погрешностей и другие виды погрешностей необходимо также учитывать их влияние на искажения полученных результатов. В этом случае дисперсию прямых измерений находят по формуле:

$$S^2=S_1^2+S_2^2+\ldots+S_n^2,$$

где S_1^2 - дисперсия измерений от случайных погрешностей, S_2^2 - дисперсия измерений от приборных погрешностей и т.д. Следует заметить, что из полученных прямых измерений оценить систематическую погрешность не представляется возможным.

Рассмотрим пример обработки результатов прямых измерений. Допустим, в результате пяти измерений получены значения: **6,7,6,5,6**. Порядок обработки полученных измерений заключается в следующем.

1. Находим среднее значение измерений по формуле (0.1)

$$\langle x\rangle=\frac{6+7+6+5+6}{5}=6.$$

2. Дисперсию среднего значения находим по формуле (0.3.)

$$\mathrm{S}^2_{\langle x\rangle}=\frac{(6-6)^2+(6-7)^2+(6-6)^2+(6-5)^2+(6-6)^2}{5\cdot(5-1)}\approx 0{,}1$$

Тогда среднеквадратичное отклонение среднего значения равно

$S_{<x>} = \sqrt{S^2_{<x>}} = \sqrt{0{,}1} = 0{,}3$.

3. Для вероятности $p = 0{,}95$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра t из **табл. 0.1**: ($t = 2{,}8$.)

4. Окончательный результат записываем в виде

$x = 6 \pm 2{,}8 \cdot 0.3 = 6{,}00 \pm 0{,}83$ при $p = 0{,}95$.

Таблица 0.1

Значение параметра Стьюдента в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы $k = n - 1$.

k	**Вероятность p**							
	0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	1,38	2,0	31	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
2	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,2
3	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
4	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,8
5	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
6	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
7	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0

Косвенные измерения.

В процессе проведения физических исследований часто приходится вычислять искомую величину y по результатам прямых измерений, связанных с искомой функциональной зависимостью $y = f(x)$. Такие измерения называются косвенными. Причем для такого типа измерений можно предложить порядок их обработки такой же, как для прямых из измерений. Согласно этого методу по результатам прямых измерений $x_1, x_2, \mathrm{h}, x_n$ находят по формуле $y = f(x)$ значения косвенных измерений $y_1, y_2, \mathrm{h}, y_n$, затем по формулам (0.1) и (0.3) вычисляют среднее значение $< y >$ дисперсию средних значений косвенных измерений $S^2_{<y>}$. Используя эти величины, записывают доверительный интервал в виде

$$y = < y > \pm t_{p,k} \cdot S_{<y>}$$

Однако для большого числа измерений данный метод является трудоемким. Поэтому на практике поступают следующим образом.

Среднее значение косвенного измерения $< y >$ находят путем подстановки соответствующих средних значений прямых измерений в следующее равенство $< y >= f(< x >)$. Т.к. при малых значениях Δx приращение Δy пропорционально производной $\Delta y = \left[\frac{df}{dx}\right] \cdot \Delta x$, то существует следующая связь среднеквадратичных отклонений S_x и S_y:

$$S^2_y = \left[\frac{df}{dx}\right]^2 \cdot S^2_x \qquad (0.7)$$

Нередко оказывается, что искомая величина является функцией нескольких переменных x, z, t, h :

$y = f(x, z, t, \mathrm{h})$ (0.8)

В этом случае дисперсия величины y определяется по формуле

$$S^2_y = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 \cdot S^2_x + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]^2 \cdot S^2_z + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]^2 \cdot S^2_t + \mathrm{h} \qquad (0.9)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$ - частные производные от функции $y = f(x, z, t, \mathrm{h})$.

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений. Для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах

$t_i \in \{13{,}2; 13{,}4; 13{,}5; 13{,}1; 13{,}6\}$. Необходимо найти доверительный интервал для величины скорости бегуна.

Первый способ.

1. Предполагая движение бегуна равномерным, находим его скорость

$$V_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{100}{13{,}2} = 7{,}5757 \text{ м/с},\ V_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{100}{13{,}4} = 7{,}4627 \text{ м/с},$$

$$V_3 = \frac{100}{13{,}5} = 7{,}4074 \text{ м/с},\ V_4 = \frac{100}{13{,}1} = 7{,}6359 \text{ м/с},$$

$$V_5 = \frac{100}{13{,}6} = 7{,}3529 \text{ м/с}$$

2. Находим среднее значение скорости

$$< V >= \frac{7{,}5757 + 7{,}4627 + 7{,}4074 + 7{,}6359 + 7{,}3529}{5} = 7{,}4869 \ м/с$$

Находим дисперсию среднего значения скорости

$$S^2_{<V>} = \frac{(7{,}5757 - 7{,}4859)^2 + (7{,}5757 - 7{,}4627)^2 + \text{h}}{5 \cdot (5-1)} = 2{,}74 \cdot 10^{-3} \ \frac{м^2}{c^2}$$

Находим среднеквадратичное отклонение

$$S_{<V>} = \sqrt{2{,}74 \cdot 10^{-3}} = 0{,}052 \ \frac{м}{c}$$

3. Записываем доверительный интервал величины скорости движения бегуна

$$V = 7{,}4859 \pm 0.052 = (7{,}49 \pm 0.05) \text{ м/с}$$

Второй способ.

1. Находит среднее значение времени

$$< t >= \frac{13{,}2 + 13{,}4 + 13{,}5{,}+13{,}1 + 13{,}6}{5} = 13{,}36 \ c$$

2. Дисперсия и среднеквадратичное отклонение времени

$$S^2_{<t>} = 0.086 \quad S_{<t>} = 0{,}093 \ c^2$$

3. Находим среднее значение скорости

$$< V >= \frac{< S >}{< t >} = \frac{100}{13{,}36} = 7.4850 \ \frac{м}{c}$$

4. Находим формулу для дисперсии скорости

Определяем частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial \left[\frac{S}{t}\right]}{\partial S} = \frac{1}{t} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \left[\frac{S}{t}\right]}{\partial t} = -\frac{S}{t^2}$$

Получаем формулу для дисперсии скорости

$$S^2_{<V>} = \left(\frac{1}{< t >}\right)^2 \cdot S_S^2 + \left(-\frac{< S >}{< t >^2}\right)^2 \cdot S_t^2 = \frac{1}{< t >^2} \cdot S_S^2 + \frac{< S >^2}{< t >^4} \cdot S_t^2$$

Полагая, что дистанция измерялась лентой с ценой деления 1см, задаем погрешность измерений расстояния $S_{<S>} = 0{,}005$ м и вычисляем дисперсию и среднеквадратичное отклонение

$$S^2_{<V>} = \frac{1}{13{,}36^2} \cdot 0{,}005^2 + \frac{100^2}{13{,}36^4} \cdot 0{,}093^2 = 0{,}00717 \ \frac{м^2}{c^2}$$

$$S_{<V>} = \sqrt{0{,}00718} = 0{,}085 \ \frac{м}{c}$$

5. Записываем доверительный интервал

$$V = (7{,}48 \pm 0{,}09) \text{ м/с}.$$

Следует обратить внимание на то, что данный доверительный интервал записан без учета параметра Стьюдента, поэтому второй способ обработки результатов косвенных измерений является менее строгим по сравнению с первым. Данный способ обработки результатов косвенных измерений, по сути, является оценочным способом для доверительного интервала.

Совместные измерения. Метод наименьших квадратов.

Рассмотрим совместные измерения и порядок их обработки на следующем примере. Допустим, величина y и величина x связаны линейной зависимостью, т.е.:

$$y = A \cdot x \tag{0.10}$$

Если величины x, y связанные функционально, измеряются одновременно, то такие измерения называются совместными. Задачей совместных измерений является определение коэффициента A.

Для этого проведем n измерений величин x, y, последовательно измеряя их в процессе эксперимента, в результате получим n пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_2)$. Отметим на плоскости XOY экспериментальные точки, соответствующие полученным данным (рис. 0.3).

Вследствие случайных погрешностей полученные экспериментально точки не лежат на одной прямой. Но можно сформулировать критерий для выбора углового коэффициента прямой, в соответствии с которым ошибка измерения этого коэффициента будет минимальной. Этот критерий в математической статистике получил название **критерия наименьших квадратов**.

Пусть для некоторого определенного значения A прямая $y = A \cdot x$ пройдет так, как это показано на рис 0.3. Для $x = x_i$ ордината y при этом равна $A \cdot x_i$, экспериментальное значение y для $x = x_i$ равно y_i, т.е. существует отклонение экспериментального значения y от вычисленного значения $A \cdot x_i$. Эти отклонения для каждого измеренного значения величины y могут отличаться как по величине, так и по знаку

$$\Delta_i = y_i - A \cdot x_i \tag{0.11}$$

Согласно критерию наименьших квадратов, угловой коэффициент прямой $y = A \cdot x$ должен быть таким, чтобы сумма квадратов отклонений ординат прямой $y = A \cdot x$ при тех же значениях аргумента была минимальной. Это условие метода наименьших квадратов математически записывается так:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2 \to \min \tag{0.12}$$

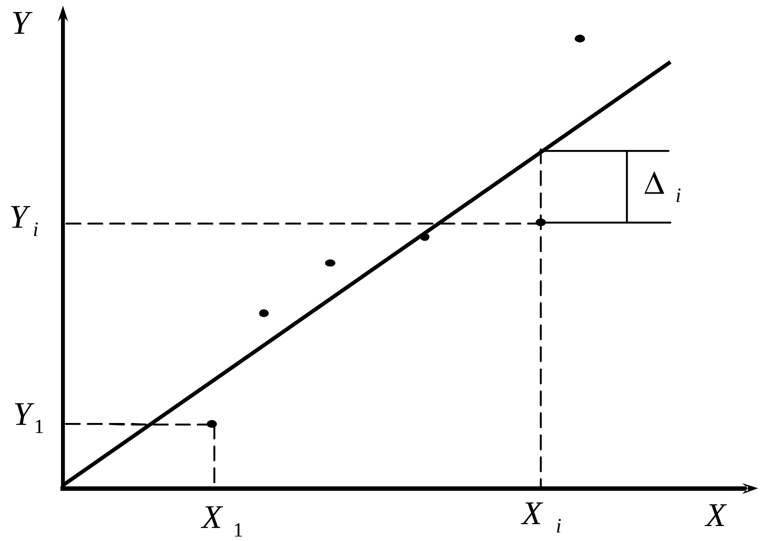


Рисунок 0.3

В выражении (0.12) остаточная сумма квадратов Q является функцией неизвестного параметра A. Минимальное значение этой функции достигается тогда, когда ее производная при некотором значении A равна нулю, т.е.:

$$\frac{dQ}{dA} = 0 \tag{0.13}$$

Следовательно, взяв от суммы (0.12) производную по параметру A и приравняв ее к нулю, получим уравнение:

$$\frac{d}{dA}\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2\right] = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i) \cdot (-x_i) = 0 \tag{0.14}$$

Это уравнение линейное относительно A, и из него легко получить формулу для нахождения неизвестного параметра A:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (0.15)$$

Параметр A является случайной величиной. С помощью методов математической статистики можно найти формулу для дисперсии этого параметра

$$S_A^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2}{n-1} \qquad (0.16)$$

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет определить по результатам n совместных измерений, как величину неизвестного параметра A, так и его дисперсию S_A^2. В ряде случаев функциональная зависимость между величинами y и x может отличаться от простейшей линейной зависимости (0.10).

Часто приходится использовать несколько более сложную зависимость, неизвестными уже могут быть не один, а два параметра, которые в результате совместных измерений необходимо определить. Такой зависимостью, например, является линейная функция вида

$$y = A \cdot x + B \qquad (0.17)$$

Используя метод наименьших квадратов, можно получить расчетные формула для определения параметров A и B. Эти формулы записываются в виде

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{n} \cdot \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i} \cdot \mathrm{y_i} - \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i} \cdot \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i}}{\mathrm{n} \cdot \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i^2} - \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}\right)^2}, \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad (0.18)$$

Величина дисперсии этих параметров находится по формулам

$$S_A^2 = \frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \frac{Q}{n-2} \qquad S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \frac{Q}{n-2}$$

Проверка статистических гипотез. Критерий Фишера.

Первый вопрос, который нас интересует после вычисления коэффициента A, это проверка соответствия (0.10) экспериментальным данным x_i, y_i.

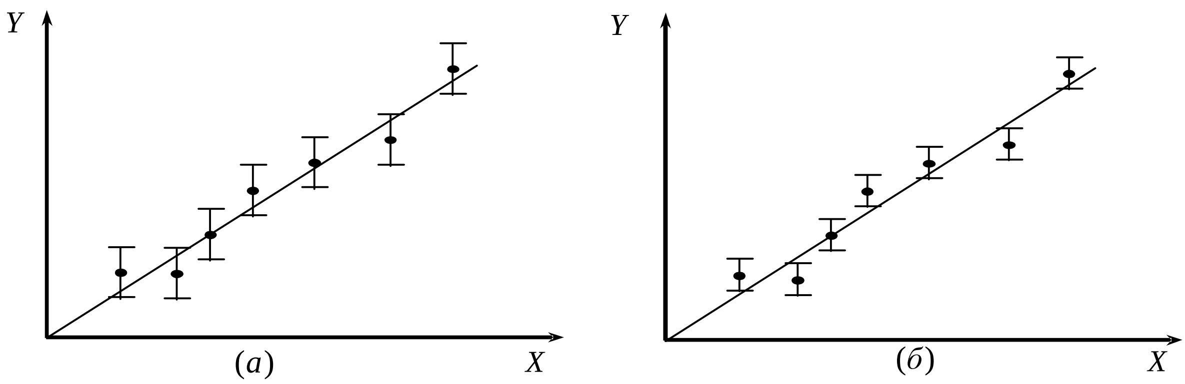


Рис. 0.4.

На рисунках (0.4 а), (0.4 б) линией показана зависимость $y = A \cdot x$, полученная по методу наименьших квадратов. Точками показаны экспериментальные данные с разбросом, равным $\pm 2 \cdot S_y$. Очевидно, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует экспериментальным данным только в первом случае.

Однако это качественные соображения, а нам нужна количественная оценка. Для характеристики среднего разброса точек относительно $y = A \cdot x$ вполне подходит остаточная сумма квадратов. Неудобство состоит в том, что остаточная сумма квадратов зависит от числа коэффициентов в уравнении. Кроме того, если ввести столько коэффициентов, сколько имеется независимых измерений, то мы получим остаточную сумму, равную нулю.

Поэтому предпочитают делить остаточную сумму Q квадратов на число степеней свободы. Числом степеней свободы в математической статистике называется разность между числом измерений n и числом коэффициентов m, входящих в уравнение $y = f(x, A_1, A_2, \ldots, A_m)$, т.е. $k = n - m$.

Остаточная сумма квадратов Q, деленная на число степеней свободы, называется дисперсией адекватности, т.е.

$$S_{ад}^2 = \frac{Q}{n-m} \tag{0.19}$$

Для зависимости $y = A \cdot x$ дисперсия адекватности равна

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2}{n-m}, \tag{0.20}$$

где $\boldsymbol{n}$ – число совместных измерений величин $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$.

Для проверки соответствия зависимости $y = A \cdot x$ экспериментальным данным используют F-критерий (критерий Фишера), при этом вычисляют следующее соотношение

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \tag{0.21}$$

где $S_{оп}^2$ - есть дисперсия воспроизводимости с числом степеней свободы, равным $d-1$, где d число измерений, т.е.

$$S_{оп}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \langle y \rangle)^2}{d-1}, \tag{0.22}$$

где $\boldsymbol{d}$ –число прямых измерений величины $\boldsymbol{y_i}$.

Из предыдущего равенства видно, что параметр F является величиной случайной и для него существует функция распределения, которая впервые была получена Фишером. Из **табл. 0-2** находят при известном числе степеней свободы дисперсии $(n-m), (d-1)$ и заданной вероятности p, значения $F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$ и $F_{табл}^{(d-1),(n-m)}$

Далее проверяют двухстороннее неравенство

$$\frac{1}{F_{табл}^{(d-1),(n-m)}} \le \frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \le F_{табл}^{(n-m),(d-1)} \tag{0.23}$$

В том случае, когда $S_{ад}^2 \ge S_{оп}^2$, достаточно производить одностороннюю оценку, т.е.

$$\frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \le F_{табл}^{(n-m),(d-1)} \tag{0.24}$$

Если данные условия выполняются, то с вероятностью, равной p ,можно утверждать, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует полученным экспериментальным данным.

Таблица 0.2: **Значения критерия Фишера $F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$ при надежности $p = 0{,}95$ в зависимости от числа степеней свободы сравниваемых величин дисперсий.**

d-1	**n-m**		
	3	4	5
2	**19.00**	**19.16**	**19.25**
3	**9.55**	**9.28**	**9.12**
4	**6.94**	**6.59**	**6.39**
5	**5.79**	**5.41**	**5.19**

Критерий для отбрасывания резко выделяющихся результатов измерений

При проведении прямых измерений, как отмечалось ранее, могут присутствовать грубые погрешности (промахи). Действие этих погрешностей проявляется в том, что среди множества $(x_1, x_2, \ldots, x_n,)$ полученных измерений величины x встречаются резко выделяющиеся измерения, которые могут быть промахами. Допустим, x_i является наименьшим значением полученного множества, а x_j - наибольшее значение соответственно. Выдвигается гипотеза о том, что данные измерения x_i и x_j принадлежат той же генеральной совокупности распределенной по закону Гаусса, что оставшиеся $n-2$ значений. Для проверки данной гипотезы используется следующий критерий. Предварительно находят среднее значение и среднеквадратичное отклонение полученной выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n,)$. Затем вычисляют следующих два параметра:

$$u_i = \frac{|x_i - <x>|}{S_{<x>}} \qquad u_j = \frac{|x_j - <x>|}{S_{<x>}}.$$

Полученные значения сравнивают с табличным значением $u_{\alpha,n}$, взятым из таблицы 0.3. (α - вероятность совершить ошибку при отбрасывании проверяемых измерений, n -число измерений)

Таблица 0.3:Значения параметра $u_{\alpha,n}$, используемого для отбрасывания резко выделяющихся результатов измерений

n	$u_{\alpha,n}$		
	α=0,10	α=0,05	α=0,01
3	1,15	1,15	1,15
4	1,42	1,46	1,49
5	1,60	1,67	1,75
6	1,73	1,82	1,94
7	1,83	1,94	2,10

Если $u_i < u_{\alpha,n}$, то считается, что результат измерения x_i принадлежит полученному множеству $(x_1, x_2, \ldots, x_n,)$. Если $u_i > u_{\alpha,n}$, то результат измерения x_i считается промахом, и, следовательно, отбрасывается. При этом вероятность совершить ошибку равна заданному значению α. На практике обычно используют значение $\alpha = 0{,}05$. Аналогичные рассуждения проводят и для измерения x_j.

Рассмотрим применение данного критерия на следующем примере. Пусть в результате прямых измерений времени падения тела с заданной высоты получены следующие значения: $t \in (0.20; 0.46; 0.55; 0.49; 0.60; 0.52; 0.48; 0.44)$. Пусть данные измерения распределены по закону Гаусса. Измерение $x_1 = 0.20$, очевидно, резко выделяется среди всех остальных. Проверим гипотезу о том, что данное измерение принадлежит той же генеральной совокупности, что и остальные $n-1$ измерений.

1. Находим среднее значение $<x> = 0.4675$
2. Находим дисперсию и среднеквадратичное отклонение времени падения $S^2_{<t>} = 0.00286$ $S_{<t>} = 0.05349$
3. Вычислим параметр u для $x_1 = 0.2$

$$u_1 = \frac{|0.20 - 0.4675|}{0.05349} \approx 5.0.$$

4. По таблице 0.3 для вероятности $\alpha = 0.05$ находим критическое значение параметра $u_{0.05,8} = 2.03$.

5. Сравнивая вычисленное значение параметра u_1 с критическим, делаем вывод: поставленную гипотезу о том, что $x_1 = 0.2$ принадлежит той же генеральной совокупности, с вероятностью совершить ошибку, равной 0.05, нужно отбросить, т.е. измерение $x_1 = 0.2$ выбраковывается из выборки. Затем находим новые значения среднего, дисперсии и среднеквадратичного отклонения.

Критерий для проверки равенства средних двух совокупностей.

Пусть из двух нормально распределенных генеральных совокупностей с неизвестными параметрами a_1, σ_1 и a_2, σ_2 получены выборки объемом n_1 и n_2.По результатам испытаний подсчитаны оценки параметров $< x_1 >, S_1^2$; $< x_2 >$; S_2^2. Требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве значений этих совокупностей, т.е. $a_1 = a_2 = a$

Рассмотрим вначале случай, когда дисперсии генеральных совокупностей равны, т.е. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Для проверки поставленной гипотезы $a_1 = a_2 = a$ вычисляют оценку дисперсии σ^2 по формуле:

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}{(|n_1 - n_2| - 2)} \qquad (0.25)$$

и параметр z по формуле

$$z = \frac{|< x_1 > - < x_2 >|}{S\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}. \qquad (0.26)$$

Полученное значение параметра z сравнивают с значением $z_{\alpha,k}$, найденным из **таблицы 0.4** для заданного значения вероятности совершить ошибку α и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$.

Таблица 0.4:Значения параметра $z_{\alpha,k}$, используемого для проверки равенства средних двух совокупностей.

k	$z_{\alpha,k}$				
	α=0,10	α=0,05	α=0,025	α=0,01	α=0.005
1	6.314	12.706	25.452	63.657	127.30
2	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089
3	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453
4	2.132	2.776	3.495	4.604	5.597
5	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773
∞	1.645	1.96	2.241	2.576	2.807

Если справедливо неравенство $z \le z_{\alpha,k}$, то поставленную гипотезу о том, что средние значения совпадают, не отвергают. При этом вероятность совершить ошибку равна заданному значению α.

Если дисперсии генеральных совокупностей не равны, т.е. $\sigma_1 \ne \sigma_2$, то равенство двух средних проверяют с помощью приближенного z-критерия, который вычисляют из соотношения

$$z = \frac{|< x_1 > - < x_2 >|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}, \qquad (0.27)$$

число степеней свободы при этом определяют из выражения

$$\frac{1}{k} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1}, \text{ где } c = \frac{\dfrac{S_1^2}{n_1}}{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}} \qquad (0.28)$$

Если выполняется неравенство $z \le z_{\alpha,k}$, то гипотезу $a_1 = a_2$ с вероятностью совершить ошибку равной заданному значению α, не отвергают. В противном случае $a_1 \ne a_2$. И в этом случае вероятность совершить ошибку равна заданному значению α.

Рассмотрим применение данного критерия на следующем примере. Пусть в результате проведения измерений получены значения следующие значения импульсов шаров до и после столкновения

$p_1 = 1.510 \pm 0.101 \quad n_1 = 7 \quad S_{<P_1>} = 0.042$ - импульс до столкновения.

$p_2 = 2.430 \pm 0.197 \quad n_2 = 7 \quad S_{<P_2>} = 0.082$ - импульс после столкновения.

Проверим гипотезу о том, импульсы шаров до и после столкновения равны.

1. Вычисляем параметр Z

$$z = \frac{|<p_1> - <p_2>|}{\sqrt{\frac{S^2_{<p_1>}}{n_1} + \frac{S^2_{<p_2>}}{n_2}}} = \frac{|1.510 - 2.430|}{\sqrt{\frac{0.042^2}{7} + \frac{0.082^2}{7}}} = 26.42$$

2. Определяем число степеней свободы по формуле: $\frac{1}{k} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1}$

Вначале находим параметр $c = \frac{\frac{S^2_{p_1}}{n_1}}{\frac{S^2_{p_1}}{n_1} + \frac{S^2_{p2}}{n_2}} = \frac{\frac{0.042^2}{7}}{\frac{0.042^2}{7} + \frac{0.082^2}{7}} = 0.208$

Затем вычисляем параметр k $\frac{1}{k} = \frac{0.208^2}{7-1} + \frac{(1-0.208)^2}{7-1} = 0.0144 \Rightarrow k = 69.46$

3. По табл. 0.4 для заданного значения вероятности совершить ошибку ($\alpha = 0.05$) находим параметр $z_{\alpha,k}$: $z_{\alpha,k} = 1.96$.

4. Так как $z = 26.42 >> z_{\alpha,k} = 1.96$ то гипотезу о равенстве средних значений двух генеральных совокупностей ($p_1 = p_2$) с вероятностью совершить ошибку $\alpha = 0.05$ необходимо отвергнуть. Делаем вывод: в данном эксперименте импульс шаров до и после столкновения не равны.

ПРИМЕР ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Лабораторная работа: Определение ускорение свободного падения с помощью математического маятника.

***Упражнение 1.* Порядок обработки прямых измерений. Определение периода колебаний математического маятника.**

1. Получите у преподавателя значения длины нити математического маятника l и числа измерений n периода колебаний.
2. Проведите n измерений периода колебаний маятника, результаты этих измерений внесите в **табл.0.4**.

Таблица 0.4

$N_{изм}$	1	2	3	4	5	$\sum$
T_i						
$\left(T_i - \langle T \rangle\right)^2$						

3. Просуммируйте все значения t_i и данную сумму занесите в соответствующую графу $\sum$. Используя значение этой суммы, по формуле (0.1) найдите среднее значение периода колебаний математического маятника.
4. Зная $< T >$, заполните окончательно **табл.0.4**, используя данные этой таблицы, найдите дисперсию среднего значение периода колебаний маятника по формуле (0.3).
5. Найдите среднеквадратичное отклонение среднего значения по формуле

$$S_{<T>} = \sqrt{S^2_{<T>}}$$

6. Задаваясь вероятностью $p = 0.95$ и зная число степеней свободы $k = n - 1$, определите по **табл.О.1** значение параметра Стьюдента $t_{p,k}$. Результат измерения периода колебаний запишите в виде

$$T = < T > \pm t_{p,k} \cdot S_{<T>} \ .$$

***Упражнение 2.* Обработка результатов косвенных измерений.**

Определение ускорения свободного падения

1. Запишите в **табл.0.5** значения периода колебаний маятника. Эти данные возьмите из упражнения 1.

Таблица 0.5

$N_{изм}$	T_i	$S_{<T>}$	l	$S_{<l>}$	g	$S_{<g>}$
1						
2						
3						
4						
5						
$\sum$						

2. Затем по формуле $< g > = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{< T^2 >}$ вычислите среднее значение ускорения.
3. Вычислите дисперсию ускорения свободного падения по формуле

$$S^2_{<g>} = \left(\frac{4 \cdot \pi^2}{< T^2 >}\right)^2 \cdot S_l^2 + \left(\frac{-8 \cdot \pi^2 \cdot l}{< T^3 >}\right)^2 \cdot S^2_{<T>} + \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot l}{< T^2 >}\right)^2 \cdot S^2_{\pi}$$

В качестве дисперсии длины маятника берется квадрат приборной погрешности. Дисперсия числа π находится из таблицы 0.5. (**см. Приложение**)

4. Найдите среднеквадратичное отклонение ускорения по формуле

$$S_{<g>} = \sqrt{S^2_{<g>}}$$

5. Результат измерения ускорения запишите в виде

$$g = < g > \pm S_{<g>}$$

***Упражнение 3.* Порядок обработки совместных измерений. Определение ускорения свободного падения**

В этом упражнении необходимо определить ускорение свободного падения из совместных измерений длины математического маятника и его периода колебаний.

Период колебаний математического маятника вычисляется по формуле

$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$. Для того, чтобы воспользоваться методом обработки совместных измерений для зависимости $y = A\cdot x$ введем следующие обозначения:

$$y = T; \qquad x = \sqrt{l}; \qquad A = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g}}$$

Таким образом, зная экспериментальную зависимость $T = f(\sqrt{l})$ или $y = A\cdot x$, можем вычислить коэффициент A. Затем из соотношения $g = \frac{4\cdot\pi^2}{A^2}$ вычислим ускорение свободного падения.

1. Получите у преподавателя значение пяти различных длины , и для заданных значений длин математического маятника определите период его колебаний.
2. Полученные данные запишите в **табл.0.6** (графы 2,3). В соответствии с вышеприведенными обозначениями заполните графы 4 и 5

Таблица 0.6

1	2	3	4	5	6	7	8
$N_{изм}$	l_i	T_i	x_i	y_i	$x_i\cdot y$	x_i^2	$(y_i - A\cdot x_i)^2$
1							
2							
3							
4							
5							
$\sum$							

3. Проведите соответствующие вычисления и заполните графы 6,7 **табл.0.6**. В графу $\sum$ вносится сумма соответствующих колонок.
4. По формуле (0.15) вычислите значения параметра A.
5. Проведите соответствующие расчеты и заполните графу 8.

Далее по формуле (0.16) вычислите дисперсии параметра A .

6. По формуле $g = \frac{4\cdot\pi^2}{A^2}$ вычислите ускорение свободного падения.
7. По формуле $S^2_{<g>} = \left(\frac{8\cdot\pi}{A^2}\right)^2\cdot S^2_{\pi} + \left(-\frac{8\cdot\pi^2}{A^3}\right)^2\cdot S^2_A$ вычислите среднеквадратичное отклонение ускорения свободного падения.
8. Окончательный результат запишите в виде $g = <g> \pm S_{<g>}$.
9. В координатах XOY постройте график зависимости $y = A\cdot x$, там же нанесите звездочками экспериментальные точки (x_i, y_i).
10. По формуле (0.20) найдите дисперсию адекватности. Дисперсию воспроизводимости найдите по формуле $S^2_{<y>} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(y_i - <y>)^2}{4}$, где $y_i = T_i$. Значения T_i возьмите из первого упражнения. По этим данным найдите критерий Фишера. Сравнивая полученное значение критерия Фишера с табличным, сделайте окончательный вывод о соответствии зависимости $y = A\cdot x$ полученным экспериментальным данным.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным видам погрешностей. Приведите примеры.
2. Как установить наличие случайных погрешностей при проведении измерений?
3. Как установить наличие систематических погрешностей при проведении измерений?
4. Как установить наличие ”промахов” при проведении измерений? Как отбраковываются промахи?
5. Объясните, что понимается под генеральной совокупностью измеряемой величины x, и ее выборки.
6. Дайте определение среднего значения выборки, дисперсии, дисперсии среднего значения и среднеквадратичного отклонения.
7. Что такое прямые, косвенные и совместные измерения? Приведите примеры.
8. Объясните на числовом примере порядок обработки прямых измерений. Для чего используется коэффициент Стьюдента.
9. Объясните на примере два метода обработки косвенных измерений.
10. Для совместных измерений на примере линейной зависимости объясните сущность метода наименьших квадратов.
11. Используя условие наименьших квадратов, выведите формулу для вычисления параметра A в линейной зависимости $y = A \cdot x$.
12. Как записывают окончательный результат прямых измерений?
13. Как проверяют гипотезу о соответствии экспериментальных данных предполагаемой зависимости? Что такое критерий Фишера?
14. Как находится дисперсия адекватности и дисперсия воспроизводимости?
15. Как проверяют гипотезу о равенстве средних значений двух выборок?

Приведите несколько примеров использования критерия о проверке равенства средних значений двух выборок.

Экспериментальные данные, полученные при выполнении лабораторной работы: Определение ускорение свободного падения с помощью математического маятника.

Упражнение 1. Порядок обработки прямых измерений. Определение периода колебаний математического маятника.

Номер бригады	Длина нити l (м)	Период колебаний				
		T_1 (с)	T_2(с)	T_3(с)	T_4(с)	T_5(с)
1	0.50	1.4170	1.4160	1.4180	1.4169	1.4154
2	0.47	1.3758	1.3756	1.3764	1.3769	1.3753
3	0.44	1.3349	1.3350	1.3323	1.3320	1.3327
4	0.41	1.2858	1.2857	1.2855	1.2855	1.2853
5	0.38	1.2363	1.2360	1.2353	1.2365	1.2363
6	0.35	1.1921	1.1918	1.1922	1.1941	1.1922
7	0.32	1.1437	1.1450	1.1450	1.1423	1.1453
8	0.29	1.0853	1.0869	1.0850	1.0850	1.0866
9	0.26	1.0356	1.0327	1.0324	1.0353	1.0321
10	0.23	0.9767	0.9765	0.9763	0.9769	0.9767

Упражнение 3. **Порядок обработки совместных измерений. Определение ускорения свободного падения**

N зм	Бригада 1		Бригада 2		Бригада 3		Бригада 4		Бригада 5	
	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i
1	0.50	1.4470	0.47	1.3758	0.44	1.3349	0.41	1.2857	0.38	1.2363
2	0.44	1.3349	0.41	1.2858	0.50	1.4160	0.47	1.4160	0.50	1.4470
3	0.38	1.2363	0.35	1.1921	0.38	1.2360	0.35	1.1922	0.44	1.1921
4	0.32	1.1437	0.29	1.0853	0.32	1.1918	0.29	1.0869	0.32	1.0853
5	0.26	1.0356	0.23	0.9767	0.26	1.1450	0.23	0.9765	0.26	1.1450

N изм	Бригада 6		Бригада 7		Бригада 8		Бригада 9		Бригада 10	
	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i
1	0.35	1.1921	0.32	1.1437	0.29	1.0853	0.26	1.0356	0.23	0.9767
2	0.47	1.3764	0.50	1.4154	0.47	1.3769	0.50	1.4180	0.47	1.3769
3	0.41	1.2855	0.44	1.3320	0.41	1.2855	0.44	1.3320	0.41	1.2855
4	0.29	1.0850	0.38	1.2365	0.35	1.1922	0.38	1.2360	0.35	1.1922
5	0.23	0.9763	0.26	0.9767	0.23	0.9769	0.32	1.1423	0.29	1.0850

Приложение

Таблица 0.1: Значение параметра Стьюдента в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы $k = n - 1$.

k	Вероятность р							
	0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	1,38	2,0	31	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
2	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,2
3	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
4	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,8
5	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
6	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
7	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0

Таблица 0.2: Значения критерия Фишера $F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$ при надежности $p = 0{,}95$ в зависимости от числа степеней свободы сравниваемых величин дисперсий.

d-1	n-m		
	3	4	5
2	**19.00**	**19.16**	**19.25**
3	**9.55**	**9.28**	**9.12**
4	**6.94**	**6.59**	**6.39**
5	**5.79**	**5.41**	**5.19**

Таблица 0.3: Значения параметра $u_{\alpha,n}$, используемого для отбрасывания резко выделяющихся результатов измерений

n	$u_{\alpha,n}$		
	α=0,10	α=0,05	α=0,01
3	1,15	1,15	1,15
4	1,42	1,46	1,49
5	1,60	1,67	1,75
6	1,73	1,82	1,94
7	1,83	1,94	2,10
8	1,91	2,03	2,22

Таблица 0.4: Значения параметра $z_{\alpha,k}$, используемого для проверки равенства средних двух совокупностей.

k	$z_{\alpha,k}$				
	α=0,10	α=0,05	α=0,025	α=0,01	α=0.005
1	6.314	12.706	25.452	63.657	127.30
2	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089
3	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453
4	2.132	2.776	3.495	4.604	5.597
5	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773
6	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317
7	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029
8	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833
9	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690
10	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581
12	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428
14	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326
16	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252
18	1.734	2.101	2.445	2.878	3.193
20	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153
22	1.717	2.074	2.405	2.819	3.119
24	1.711	2.064	2.391	2.797	3.092
26	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067
28	1.701	2.048	2.369	2.763	3.047
30	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030
∞	1.645	1.96	2.241	2.576	2.807

Табл. 0.5. Погрешности округления числа π и ускорения свободного падения g.

N п/п	Число π		Ускорение св. падения g	
	π	S_π	g	S_g
1	3	0.142	10	0.193
2	3.1	0.042	9.8	0.0067
3	3.14	0.0016	9.81	0.0034
4	3.142	0.00041	9.806	0.00065
5	3.1415	0.000093	9.8067	0.00005